

# Problème ouvert 2022

Rallye mathématiques de l'Académie de Lyon

31 janvier 2022

## Présentation du problème

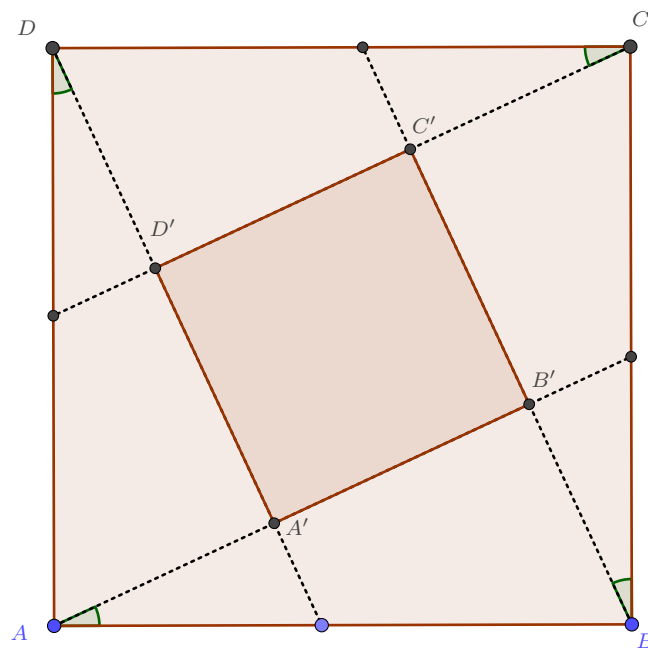


FIGURE 1: Cas du carré

### Énoncé

Tout part d'un carré  $ABCD$  dont les côtés mesurent 1dm. On construit à partir des quatre sommets quatre demies droites faisant un même angle avec le côté du carré comme indiqué sur la figure 1.

A partir de cette figure, on peut se poser plein de questions :

- Le quadrilatère  $A'B'C'D'$  est-il un carré ? Si l'angle vaut  $0$  quelle est l'aire de  $A'B'C'D'$  ? et si cet angle vaut  $45^\circ$  ? Et d'une façon plus générale, si cet angle vaut  $\alpha \in [0, 45]$  ?
- Lorsque l'angle  $\alpha$  prend les valeurs entre  $0$  et  $45^\circ$  les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  se déplacent et suivent des lignes particulières que l'on appelle les lieux des points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  ; peut-on caractériser ces lignes ? Où se coupent elles ?

- Les deux carrés  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  n'ont pas la même orientation. Mais, si on fait tourner  $ABCD$  autour de son centre d'un angle  $\alpha$  on obtient un carré  $A''B''C''D''$  dont les côtés sont parallèles à  $A'B'C'D'$ . Pouvez vous le prouver ? Existe t'il une homothétie qui transforme  $A''B''C''D''$  en  $ABCD$  ? Si oui, quel est son rapport ? Quel est son centre ?

Une fois exploré cette première situation, on peut généraliser de plusieurs façons :

- Si on recommençait dans le carré  $A'B'C'D'$  la construction pour obtenir  $A''B''C''D''$ . Quels seraient les lieux des points  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $D''$  lorsque  $\alpha$  varie entre 0 et  $45^\circ$  ?
- Si au lieu du carré c'était un rectangle, que se passe-t-il ? Et si c'était un losange ? un trapèze ? un quadrilatère quelconque ?
- Mais aussi, si on partait d'un triangle équilatéral ?
- Ou d'un polygone régulier à  $n$  côtés ?
- ...

A vous de jouer !