

Les problèmes ouverts du Rallye

Année 2022-2023

mardi 4 janvier 2023

1 Des 2 et des 3

Est-il vrai que tout entier naturel non nul peut s'écrire comme la somme d'entiers de la forme $2^p 3^q$?

Par exemple : $2 = 2^1 \times 3^0$, $3 = 2^0 \times 3^1$, $4 = 2^2 \times 3^0$, $5 = 2^2 \times 3^0 + 2^0 \times 3^0 \dots$

2 Somme de nombres

Soit n un entier strictement supérieur à 1. De combien de façons peut-on l'écrire comme la somme de k entiers positifs qui ne diffèrent d'au plus une unité ?

Autrement dit k entiers positifs tels que :

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq a_1 + 1 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_k = n \end{cases}$$

Par exemple : 5 peut s'écrire $2+3$ ou bien $2+2+1$ ou bien $2+1+1+1$ ou bien $1+1+1+1+1$ mais on ne considèrera pas la décomposition $4+1$ parce que $4-1=3 > 1$

3 Permutations et carrés

On considère l'ensemble $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$, n étant un entier positif supérieur ou égal à 2. Existe-t-il une permutation des termes de telle sorte que la somme de deux entiers consécutifs soit toujours un carré ?

Par exemple avec $n = 3$, $S_3 = \{1, 2, 3\}$ toutes les permutations de S_3 sont :

1, 2, 3 $1+2=3$ n'est pas un carré et $2+3=5$ non plus

1, 3, 2 $1+3=4$ est un carré, mais $3+2=5$ n'est pas un carré

2, 1, 3 $2+1$ n'est pas un carré mais $1+3$ est un carré

2, 3, 1 $2+3=5$ n'est pas un carré mais $3+1$ est un carré

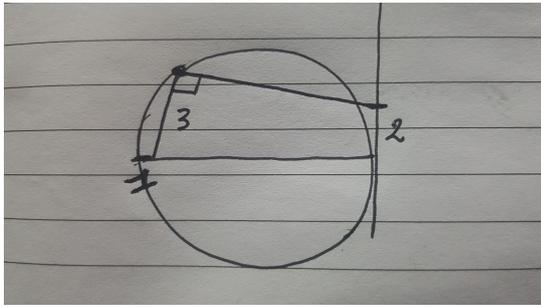
3, 1, 2 $3+1=4$ est un carré mais $1+2=3$ n'est pas un carré

3, 2, 1 $3+2=5$ et $2+1=3$ ne sont pas des carrés

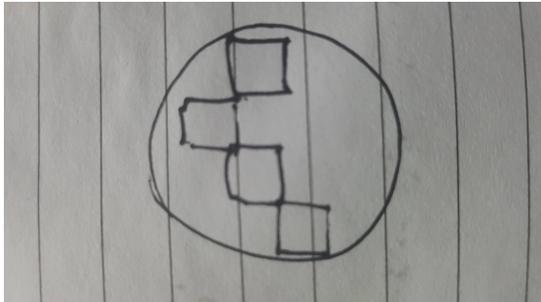
Donc pour $n = 3$ ce n'est pas possible de trouver une permutation telle que toutes les sommes de deux entiers consécutifs soient des carrés.

4 Dessins à main levée

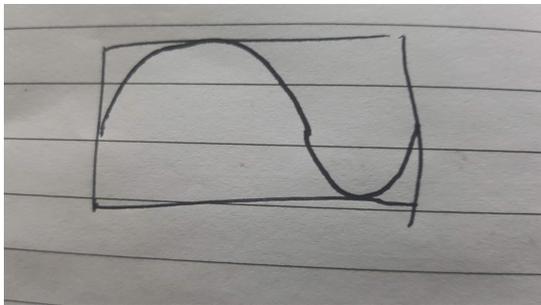
Dans ces dessins à main levée, vous pouvez ajouter les hypothèses qui vous semblent pertinentes et donc écrire précisément l'énoncé que vous allez examiner.



Quelle est l'aire du disque ?



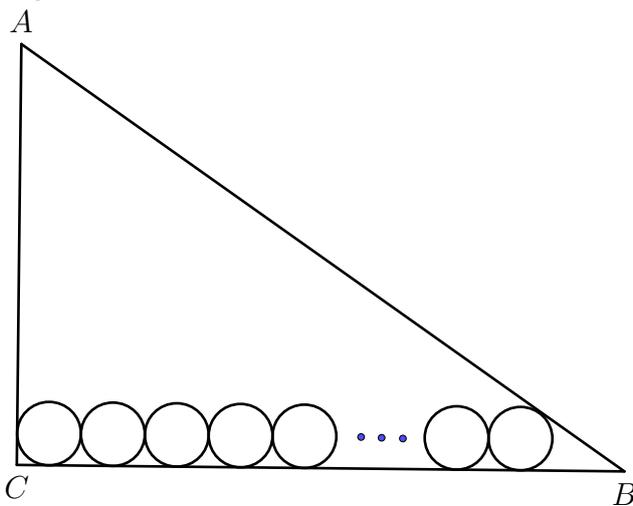
Chaque carré a des côtés de 4cm. Quelle est le diamètre du cercle ?



Le périmètre du rectangle mesure 6cm. Quelle est la longueur de la ligne à l'intérieur du rectangle ?

5 La frise

ABC un triangle rectangle en C . $CB = a$, $CA = b$ et $BA = c$. On dessine n cercles de rayon r sur le côté CB de telle sorte que tous les cercles sont tangents entre eux et tangents au côté CB et le premier est tangent au côté CA et le dernier tangent au côté AB comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Exprimer n en fonction de a , b , c et r .