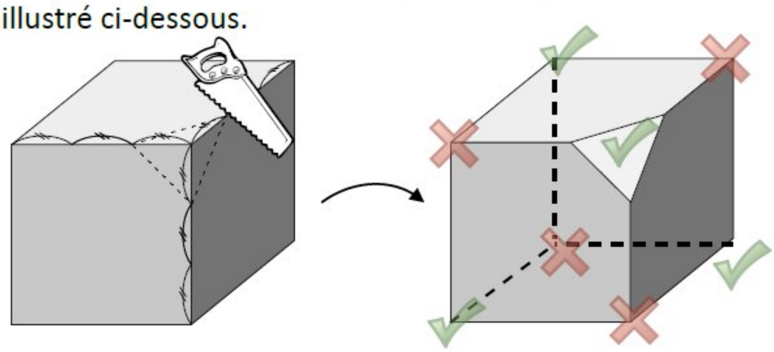
Rallye 2022 (version classique)

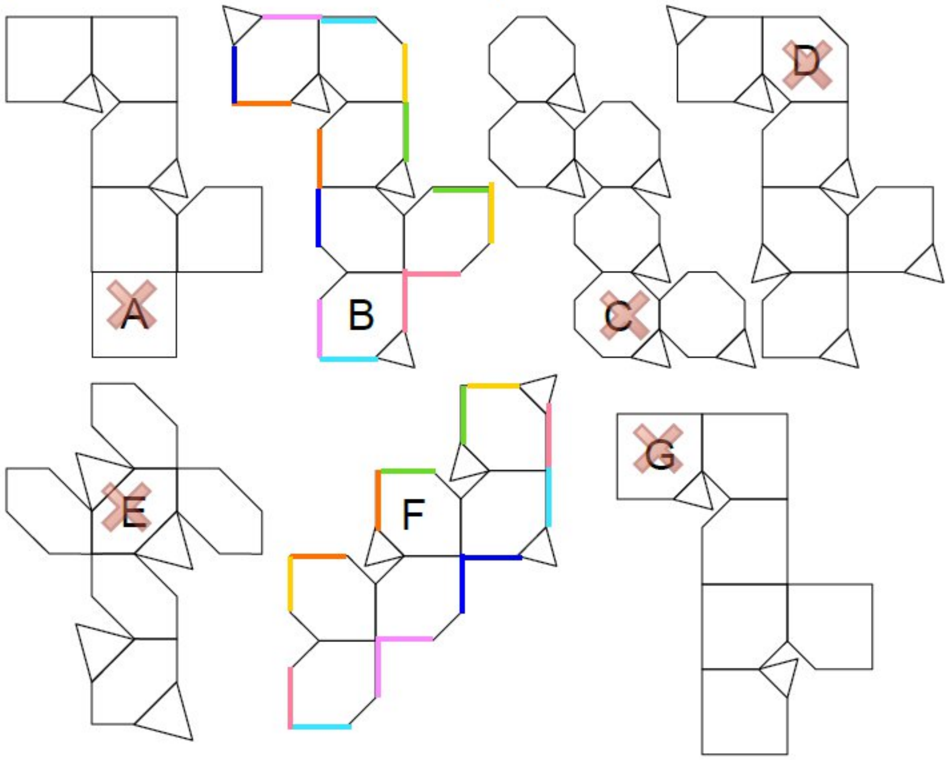
Cette correction détaillée de toutes les énigmes du rallye 2022 a été élaborée par notre collègue Olivier Jeannin, et nous l'en remercions vivement. Quelques remarques ou méthodes alternatives ont été ajoutées à son texte par l'équipe de conception du rallye.

1 - Scions du bois

Charlotte veut construire un dé pour un jeu de rôles en sciant certains coins d'un cube en bois. Pour cela, elle repère sur ce cube le maximum de sommets non reliés entre eux par une arête, puis coupe chacun de ces sommets comme illustré ci-dessous.



Combien ce dé aura-t-il de faces ?
Quels sont le ou les dessins de patrons de ce dé ?



Cherchons les sommets sciables, en éliminant tous les sommets qui sont reliés à un sommet déjà scié : on peut donc scier 4 sommets, ce qui ajoute 4 faces à notre dé qui en avait déjà 6.

Le dé aura 10 faces.

Le patron a nécessairement 4 triangles équilatéraux (ce qui élimine A, C D et G), et 6 faces qui sont des carrés auxquels on retire deux coins opposés. Les coins à éliminer des carrés doivent commencer au tiers des côtés, et non à la moitié, ce qui élimine E.

Les couleurs ajoutées aux patrons B et F permettent de vérifier que le pliage peut se faire correctement.

Les patrons corrects sont B et F.

2 - Concert en plein air

L'association Maths et Zik organise un concert en plein air. Pour accueillir le public, elle doit créer un espace fermé à l'aide de 150 barrières de 1 m de long. Ces barrières peuvent être disposées soit dans l'alignement l'une de l'autre, soit perpendiculairement.

La distanciation physique imposée est de 3 m² par personne.

Quelle est l'aire du plus grand espace fermé entouré par ces 150 barrières ?

Combien de spectateurs l'association pourra-t-elle accueillir au maximum pour ce concert ?

La surface à délimiter est forcément un rectangle. La longueur L et la largeur l doivent permettre d'avoir un périmètre égal à $L+l+L+l=150$ donc $2\,(L+l)=150$ et ainsi $L+l=75$

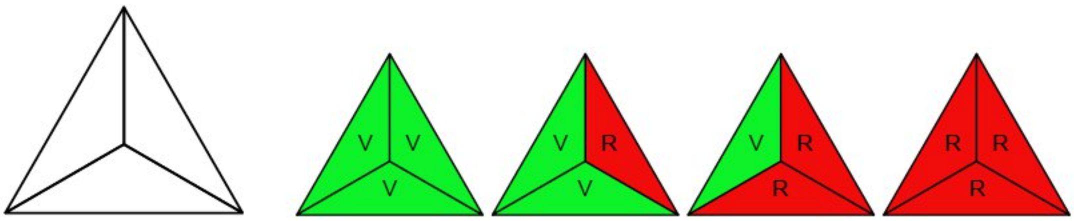
Avec un périmètre donné, le rectangle qui a la plus grande aire est un carré (à l'inverse, le rectangle de périmètre 150m qui a la plus petite aire a une aire nulle, une largeur de zéro et une longueur de 75)

Ce carré serait obtenu pour $L=l=\frac{75}{2}=37{,}5$ mais ce n'est pas possible : les barrières ont une longueur de 1m. Le plus proche qu'on puisse obtenir est $L=38$ et $l=37$, ce qui donne une **aire de $\mathbf{38\times 37=1406}$m²**.

$1406\div 3\approx 468{,}67$ donc l'association pourra accueillir **au maximum 468 personnes**.

3 - Coloriage RVB

Avec deux couleurs (rouge et vert), on peut colorier ce triangle de quatre manières différentes :



N.B. : Deux coloriages identiques par rotation ne comptent que pour un. C'est pourquoi on a compté ci-dessus un seul triangle comportant une partie rouge et deux parties vertes.

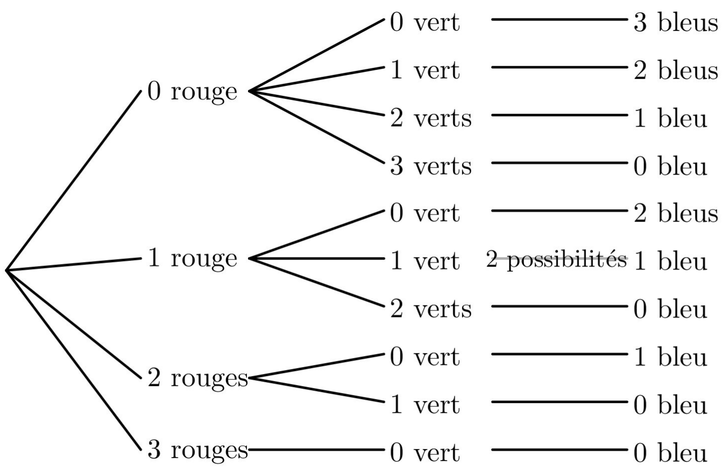
On dispose maintenant des trois couleurs RVB : rouge, vert, bleu.

Combien peut-on réaliser de coloriages différents avec ces trois couleurs ?

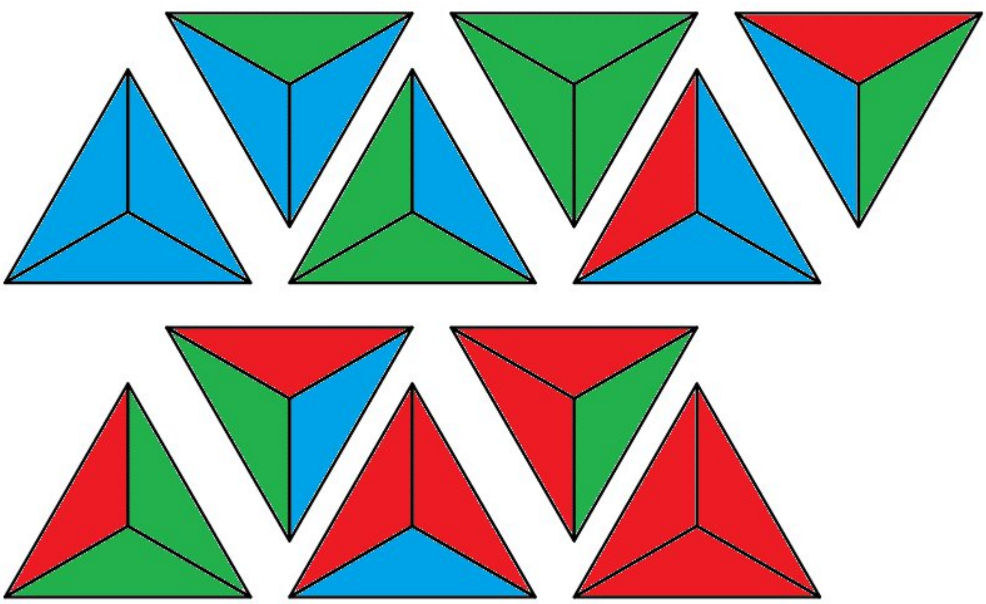
Réaliser ces différents coloriages, et les coller sur la feuille-réponse.

Un grand nombre de triangles vides à colorier sont disponibles en annexe.

Un arbre permet de s'assurer de n'oublier aucune possibilité :

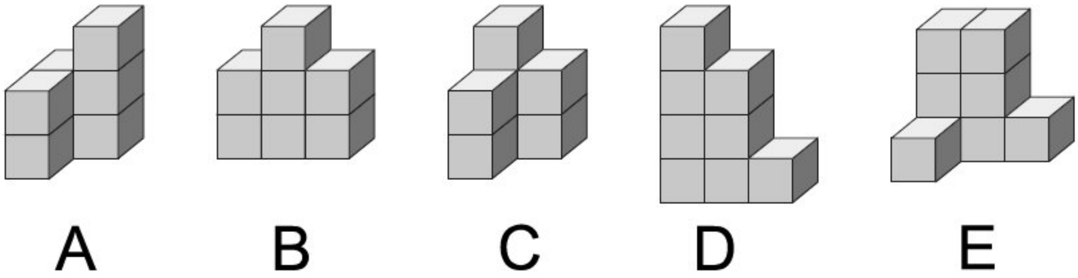


Il y a **11 coloriages différents** :

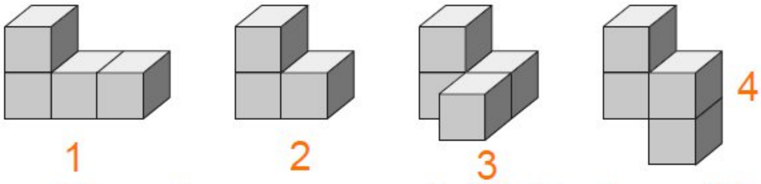


4 - Petits cubes

Les assemblages A, B et C sont formés de 7 cubes ; les assemblages D et E sont formés de 8 cubes.



Quatre de ces assemblages sont construits à l'aide de deux des quatre éléments ci-dessous.



Quel assemblage n'est pas construit à l'aide de ces éléments ?

B peut être construit en plaçant 2 sur 1.

C peut être construit en tournant 2 de 90° selon un axe vertical (la gauche s'approche, la droite s'éloigne) puis en posant 4 dessus.

A peut être construit en tournant 1 (la droite monte, la gauche descend) puis en posant 2 à gauche.

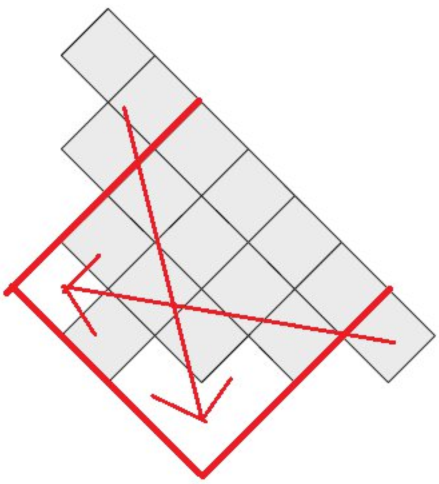
D peut être construit en posant 4 sur 1.

L'assemblage E ne peut pas être construit avec les éléments donnés.

5 - Petits Carrés deviendront Grand Carré

Cette figure est formée de 16 petits carrés identiques.

Combien de petits carrés doit-on déplacer, au minimum, pour former un grand carré ?



Déplacer **4 carrés** est suffisant.

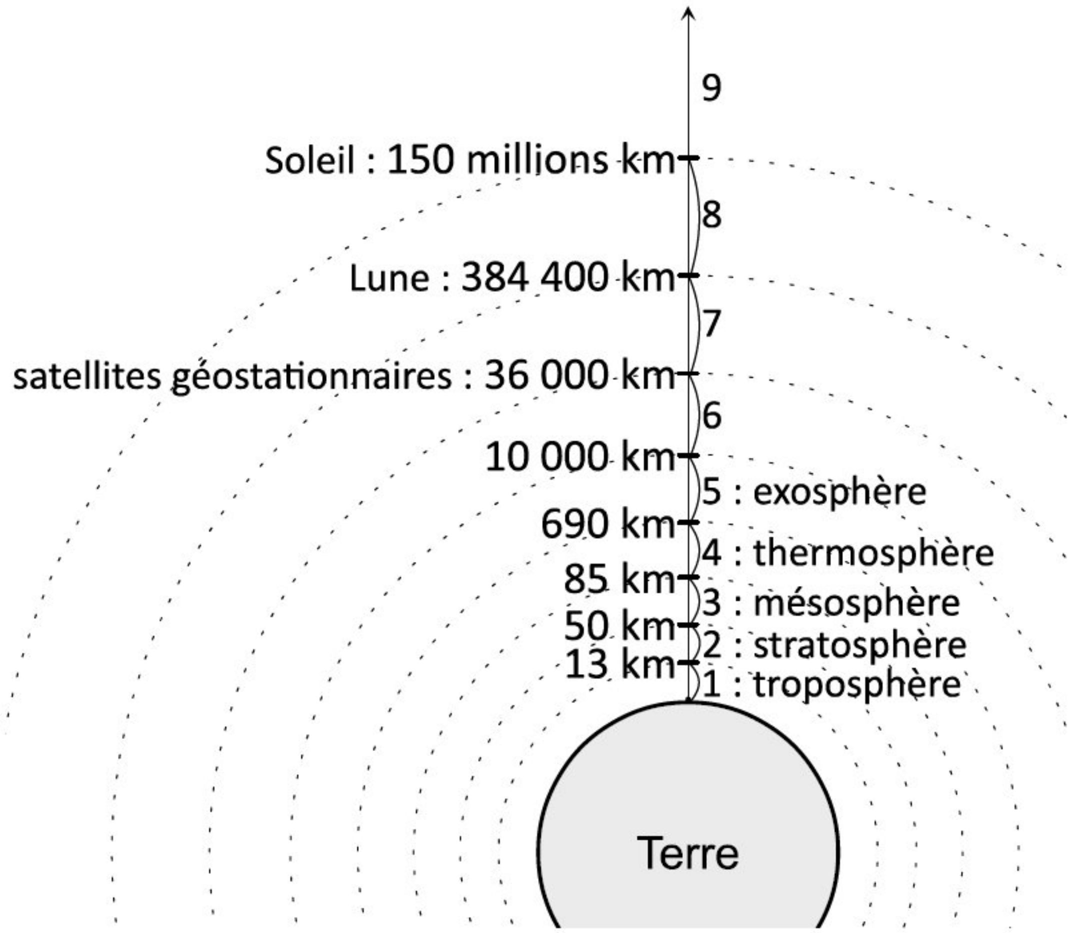
6 - Un nombre astronomique de canettes

En France, la consommation moyenne de canettes de boisson est de 76 canettes par an par chacun des 67 millions d'habitants.

La hauteur moyenne d'une canette est 11,6 cm.

Si on parvenait à empiler les unes sur les autres les canettes consommées en France pendant une année, dans quelle zone (1 à 9 ci-dessous) le sommet de cette pile se situerait-il ?

N.B. : le schéma n'est pas à l'échelle.



$11{,}6 \text{ cm} = 0{,}116 \text{ m} = 1{,}16 \times 10^{-1} \text{ m} = 1{,}16 \times 10^{-1} \times 10^{-3} \text{ km} = 1{,}16 \times 10^{-4} \text{ km}$

La hauteur totale serait donc de

$1{,}16 \times 10^{-4} \times 67 \times 10^{6} \times 76 = 590\,672 \text{ km}$

Le sommet serait dans la zone 8.

7 - Google ou Ecosia ?

Google et Ecosia sont des moteurs de recherche permettant d'obtenir des informations via Internet.

La recherche simple d'une définition sur un de ces moteurs de recherche a un impact sur l'environnement, et plus particulièrement sur les émissions de gaz à effet de serre liées à cette recherche.

L'empreinte carbone est un indicateur qui vise à mesurer cet impact. Elle se mesure en gramme équivalent CO2 (gEqCO2).

L'empreinte carbone d'une recherche simple est très différente selon le moteur de recherche utilisé. Par exemple, pour une recherche sur Google, elle est de 0,108 gEqCO2 contre 0,068 gEqCO2 sur Ecosia.

Chaque seconde, on considère qu'environ 80 000 recherches simples sont effectuées sur Google dans le monde.

Sachant que l'empreinte carbone moyenne d'un trajet de 1 km en voiture est égale à 150 gEqCO2, à quelle distance en voiture équivaudrait l'économie quotidienne d'empreinte carbone, si la moitié des utilisateurs de Google passaient à Ecosia ?

Donner la réponse en km, arrondie à l'entier.

En une seconde, l'empreinte carbone liée aux recherches sur Google est de $80\ 000 \times 0{,}108 = 8\ 640$ gEqCO2 .
Si la moitié des utilisateurs (40 000) passaient à Ecosia, l'empreinte carbone serait de

$$40\ 000 \times 0{,}108 + 40\ 000 \times 0{,}068 = 7\ 040 \text{ gEqCO2}$$

L'économie en une seconde serait donc de $8\ 640 - 7\ 040 = 1\ 600$ gEqCO2.

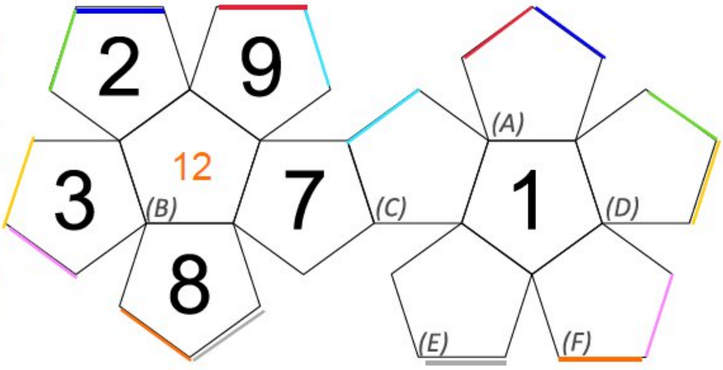
En une journée s'écoulent $24 \times 60 \times 60 = 86\ 400$ secondes. L'économie quotidienne est donc de $86\ 400 \times 1\ 600 = 1{,}3824 \times 10^8$ gEqCO2

$1{,}3824 \times 10^8 \div 150 = 921\ 600$ donc cela correspondrait à **921 600 km parcourus en voiture**.

8 - Dodéca-Dé

Ce dessin est le patron d'un dé dont les douze faces sont numérotées de 1 à 12.

La somme des nombres de deux faces parallèles est toujours égale à 13.



Numéroter les faces manquantes.

A = 5 **B =** 12 **C =** 10 **D =** 6 **E =** 11 **F =** 4

B est parallèle à 1 donc **B = 12**

On peut repérer les autres paires de faces parallèles par observation du patron : pour relier une face et sa face parallèle, il faut passer par deux pentagones « étapes » en déviant légèrement à gauche au premier, puis à droite au second (ou inversement).

C est parallèle à 3 (C-7-12-3 ou C-9-2-3 ou encore C-7-8-3 ou bien C-1-D-3) **C = 10**

A est parallèle à 8 (A-C-7-8 ou A-1-E-8 ou encore A-D-F-8). **A = 5**

Le reste est logique, en tournant : D est parallèle à 7 **D = 6**

F est parallèle à 9 **F = 4**

E est parallèle à 2 **E = 11**

Remarque : Pour repérer les faces parallèles, le plus simple est d'utiliser la **méthode « papier-ciseaux »** : découper le patron et le plier pour former le solide.

9 - Qui suis-je ?

Je suis le plus petit nombre entier de cinq chiffres dont la somme des chiffres est égale à 20.

Qui suis-je ?

Le chiffre le plus à gauche ne peut pas être zéro, sinon le nombre n'aurait pas cinq chiffres mais moins.
Le plus petit chiffre possible pour le chiffre de gauche est donc 1.

Il reste à trouver les quatre chiffres de droite, dont la somme vaut 19.

Chaque chiffre à gauche d'un autre augmente nécessairement le nombre : essayons d'utiliser au maximum les chiffres de droite. Le chiffre le plus à droite peut être 9, le suivant aussi. On trouve alors 10199.

Si le dernier chiffre n'était pas 9, il faudrait augmenter un autre chiffre pour conserver une somme égale à 20. Cela donnerait un nombre plus grand, ce qui n'est pas souhaitable. De même avec le 9 des dizaines.

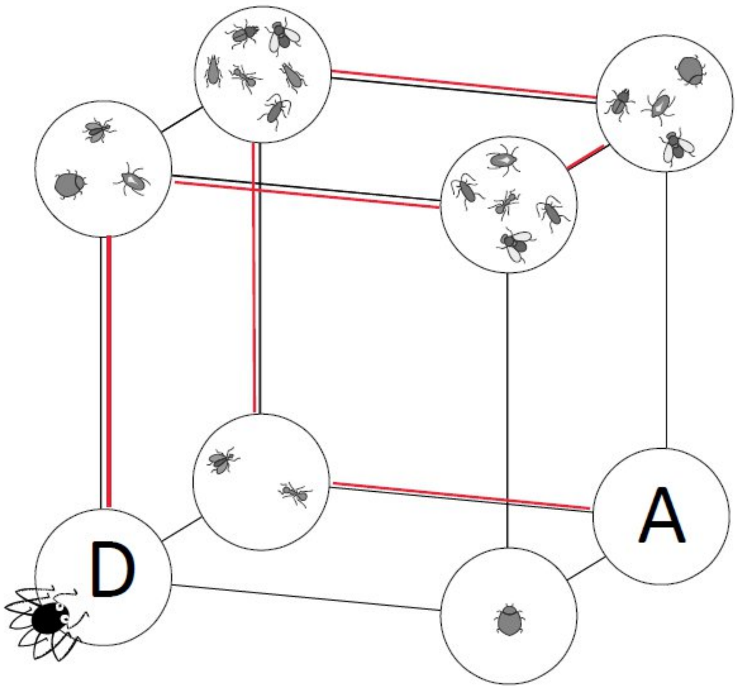
Donc **le nombre recherché est 10 199**.

10 - Spider-Math

Dans ce jeu, Spider-Math est une araignée qui se déplace sur les arêtes d'un cube en fil de fer depuis le sommet D (départ) jusqu'au sommet A (arrivée), et ne repasse jamais plus d'une fois par le même sommet.

Des insectes sont piégés sur chacun des autres sommets de ce cube.

Combien d'insectes peut-elle manger, au maximum, en allant de D à A ?

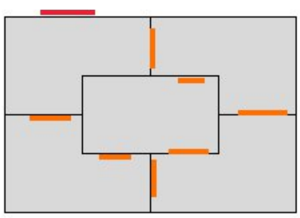


On constate qu'il est possible de passer par tous les sommets sauf un. Il suffit de s'arranger pour ne pas passer par celui qui a le moins d'insecte (un seul).

$$3 + 5 + 4 + 6 + 2 = 8 + 12 = 20$$

Elle peut manger **20 insectes au maximum**.

11 - Maison d'Archie



Sur le plan de sa future maison, Archie a dessiné les murs et va placer les portes.

Une seule porte permet d'entrer dans la maison, et Archie veut qu'il y ait exactement trois portes dans chacune des cinq pièces.

Combien Archie doit-il prévoir de portes ?

La situation est symétrique selon un axe vertical et un axe horizontal, on peut décider de n'importe quelle pièce (sauf celle au centre) pour ouvrir vers l'extérieur. On place la porte rouge.
A part la pièce liée à l'extérieur et la pièce au centre, les trois autres sont voisines de trois pièces, il n'y a donc pas le choix. On place donc les portes orange.
On constate que le problème est résolu : la pièce au centre a bien trois portes, comme la pièce liée à l'extérieur.

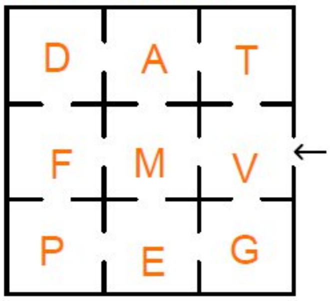
Archie **doit prévoir 8 portes**.

<u>Remarque</u> : si on ajoute le nombre de portes de toutes les pièces, on trouve $5 \times 3 = 15$ portes. La porte qui donne à l'extérieur a été comptée une seule fois, et toutes les autres deux fois. Ceci permet de trouver uniquement par le calcul le nombre de 8 portes. Cependant, il est nécessaire de placer ces portes sur le plan pour vérifier l'existence d'une solution effective.

12 - Plan de la MMI

Les neuf salles de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique (MMI) évoquent des mathématiciennes et mathématiciens de diverses époques.

- On entre dans la MMI par la salle Cédric Villani (salle V).
- Les ordinateurs se trouvent dans la salle Alan Turing (salle T).
- De la salle Euclide (salle E), on peut se rendre directement dans les salles Pythagore (salle P), Sophie Germain (salle G) et Maryam Mirzakhani (salle M).
- De la salle Maryam Mirzakhani, on peut se rendre directement dans les salles Cédric Villani, Pierre de Fermat (salle F) et Archimède (salle A).
- De la salle René Descartes (salle D), on ne peut pas se rendre directement dans la salle Cédric Villani.
- De la salle Pierre de Fermat, on peut se rendre directement dans les salles Pythagore et René Descartes.



Compléter le plan.

1) Les différentes salles sont V, T, E, P, G, M, F, A et D
2) La salle V est immédiatement identifiée à la première phrase.
3) La quatrième phrase indique que M est liée à trois salles (au moins) donc elle ne peut pas être dans un coin. Comme elle est liée à V, M est forcément au centre.
4) La quatrième phrase indique aussi que M est liée à F et A, et la troisième phrase indique que M est liée à E. Les trois salles en haut, à gauche et en bas de M sont donc F, A et E (dans un ordre à déterminer)
5) La seconde phrase semble ne rien indiquer, mais elle donne tout de même le nom d'une salle…
6) D'après 3), les quatre coins sont nécessairement T, P, G et D
7) D n'est pas liée à V, donc D est un coin à gauche.
8) La salle P est liée à E (phrase 3) et à F (phrase 6). Les coins de droite sont liés à V, donc P est forcément à gauche.
9) Ainsi, les deux coins à gauche sont P et D
10) Aucune donnée ne donne d'indication « verticale » (au-dessus, en dessous), la situation est en tout point symétrique par rapport à un axe horizontal.
    Il y a donc (au moins) deux solutions, symétriques.
    On peut décider de placer D au coin supérieur gauche, et P au coin inférieur droite.
11) D'après la dernière phrase, F doit relier P et D.
12) Le reste s'enchaîne naturellement.

13 - Nombres croisés

En esa cuadrícula, se puede leer todos los números de la lista, escritos en cifras, horizontalmente de izquierda a derecha o verticalmente de arriba hacia abajo.

Completar el cuadrícula.

Nella tabella qui accanto, si possono leggere tutti i numeri della lista, scritti in cifre, orizzontalmente da sinistra verso destra o verticalmente dall'alto verso il basso.

Completa la tabella.

In diesem Raster sind alle Zahlen der Liste zu lesen, die horizontal von links nach rechts, oder vertikal von oben nach unten gechrieben sind.

Ergänzen Sie bitte das Raster.

In this grid, we can read all the numbers in the list, written in figures, horizontally from left to right or vertically from top to bottom.

Complete the grid.

Complete the grid.

Cuatro mil cuatro
Cuatro mil cuarenta
Veinticuatro mil dos
Veinticuatro mil dos cientos cuarenta y cuatro
Cuarenta mil cuarenta
Cuarenta mil dos cientos cuatro
Dos cientos veintidós mil
Dos cientos veinticuatro mil cuatrocientos veinte
Dos cientos cuarenta y cuatro mil veinte

Quattromilaquattro
Quattromilaquaranta
Ventiquattromiladue
Ventiquattromiladuecentoquarantaquattro
Quarantamilaquaranta
Quarantamiladuecentoquattro
Duecentoventiduemila
Duecentoventiquattromilaquattrocentoventi
Duecentoquarantaquattromilaventi

Viertausendvier
Viertausendvierzig .
Vierundzwanzigtausendzwei
Vierundzwanzigtausendzweihundertvierundvierzig
Vierzigtausendvierzig
Vierzigtausendzweihundertvier
Zweihundertzweiundzwanzigtausend
Zweihundertvierundzwanzigtausendvierhundertzwanzig
Zweihundertvierundvierzigtausendzwanzig

Four thousand four 4004
Four thousand forty 4040
Twenty-four thousand two 24002
Twenty-four thousand two hundred forty-four 24244
Forty thousand forty 40040
Forty thousand two hundred four 40204
Two hundred twenty-two thousand 222000
Two hundred twenty-four thousand four hundred twenty 224420
Two hundred forty-four thousand twenty 244020

2	2	4	4	2	0
	4	0	0	4	
2	2	2	0	0	0
	4	0	4	0	
2	4	4	0	2	0

Les trois derniers nombres, de six chiffres, sont nécessairement horizontaux. Les trois commencent par 2 et finissent par 0.

Les deux premiers nombres, de quatre chiffres, sont nécessairement horizontaux. Les deux commencent par 40.

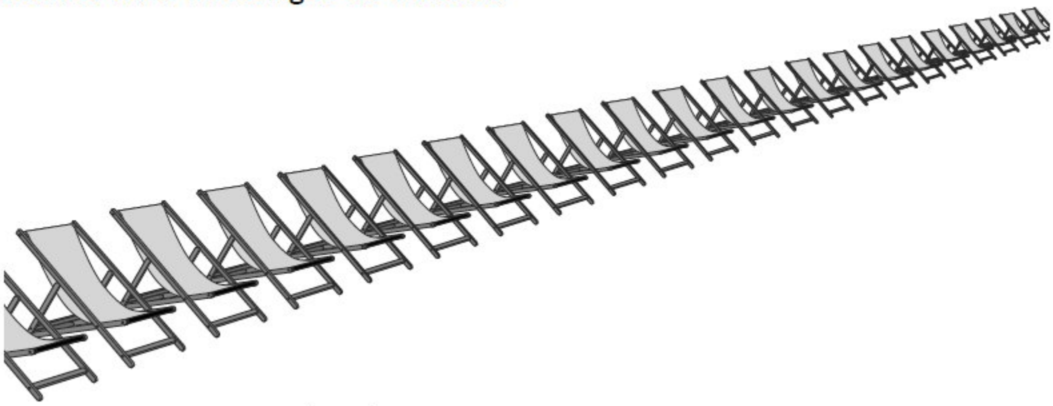
En première position verticale, il n'y a que 24244 qui convienne avec les deux 4 déjà placés.

On peut ainsi inscrire en bas le seul nombre possible à six chiffres : 244020

Le reste s'enchaîne naturellement.

14 - Transats

Lors d'une croisière, quatre amis, Olivia, Sophie, Imen et Walid sont installés dans une rangée de transats.



Imen et Olivia sont séparées par un transat.
Walid et Imen sont séparés par cinq transats.
Sophie et Walid sont séparés par huit transats.

Au minimum, combien de transats séparent Olivia et Sophie ? Et au maximum ?

Notons X les transats non identifiés, et I, O, W et S les transats occupés par les amis.

Plaçons définitivement I et O   I X O   (la situation est symétrique, on pourrait commencer avec O X I)

Il y a deux possibilités : soit Olivia est entre Walid et Imen, soit Imen est entre Walid et Olivier (Walid ne pouvant pas être entre Olivia et Imen).

I X O X X X W   W X X X X X I X O

Il y a à nouveau deux possibilités à chaque fois :

S X X I X O X X X W   I X O X X X W X X X X X X X X S   S X X X X X X X X W X X X X X I X O   W X X X X X I X O S

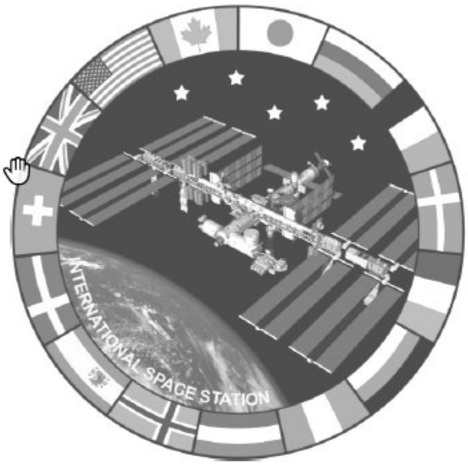
Au minimum, Olivia et Sophie sont à côté (**séparées par zéro transat**), et **au maximum elles sont séparées de 16** transats (1+5+8 plus leurs deux amis).

15 - Station Spatiale Internationale

La Station Spatiale Internationale survole la Terre à 400 km d'altitude. Elle se déplace à une vitesse approximative de 8 km/s par rapport au sol. On considère que le rayon terrestre est égal à 6 400 km.

Combien de temps met la Station Spatiale Internationale pour faire le tour de la Terre ?

*Donner la réponse en heures et minutes, sous la forme _h**min (où _ représente un nombre entier et ** représente un nombre de deux chiffres entre 00 et 59).*



On peut comprendre de deux manières différentes la donnée de la vitesse « 8 km/s par rapport au sol » :

1) La vitesse de la station, mesurée par rapport à un point fixe au sol, est de 8 km/s.
Si une personne était fixe par rapport au sol et à une altitude de 400 km, sur la trajectoire de la station, elle la verrait passer à une vitesse de 8 km/s.

Il faut donc considérer le périmètre de l'orbite à 40 km d'altitude : le rayon est $6400 + 400 = 6\ 800$ km, donc le périmètre est $2 \times \pi \times 6800 = 13\ 600\pi$ km.

$13\ 600\pi \div 8 = 1\ 700\ \pi$ secondes sont alors nécessaires à la station pour faire le tour de la Terre, c'est-à-dire environ 5 341 secondes.

$5\ 341 = 89 \times 60 + 1$ donc 5 341 secondes correspondent à 89 minutes environ.

La Station Spatiale Internationale ferait donc le tour de la Terre en 1h29min.

2) Si la station est à la verticale d'un point à la surface du sol, une seconde plus tard elle sera à la verticale d'un point situé à 8 km du premier.

Ainsi 8 km/s correspondrait à la vitesse de la projection orthogonale de la station (projection suivant un axe formant un angle droit avec la surface de la Terre). Comme si un pointeur laser était pointé vers le centre de la Terre, et que ce point lumineux à la surface de la Terre avait une vitesse de 8 km/s.

Il faut donc considérer le périmètre au niveau du sol : $2 \times \pi \times 6\ 400 = 12\ 800\pi$ km.

$12\ 800\pi \div 8 = 1\ 600\ \pi$ secondes sont alors nécessaires à la station pour faire le tour de la Terre, c'est-à-dire environ 5 027 secondes.

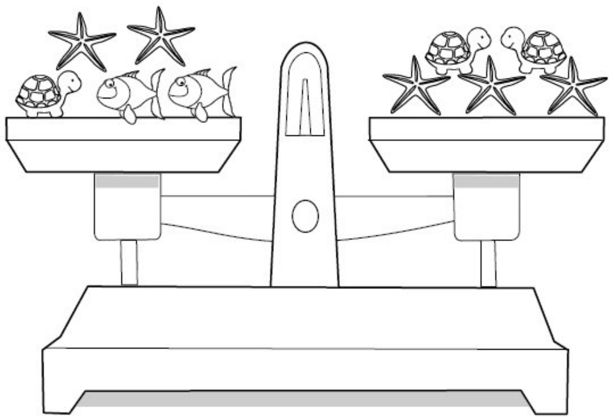
$5\ 027 = 83 \times 60 + 47$ donc 5 027 secondes correspondent à 84 minutes environ.

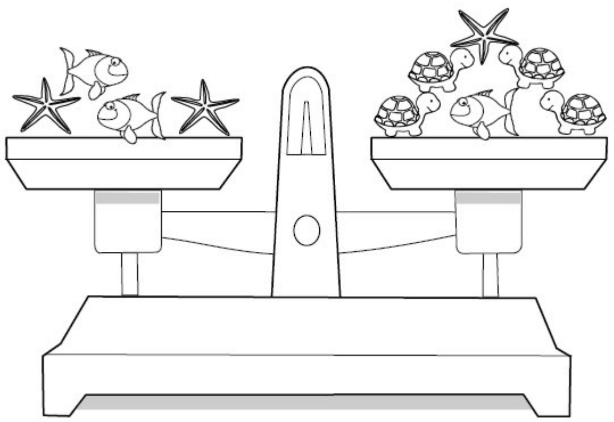
La Station Spatiale Internationale ferait donc le tour de la Terre en 1h23min.

Les deux réponses ont été acceptées.

16 - Sur la plage

Dans le magasin de la plage, Léa s'amuse avec des moules à sable en forme de tortue, de poisson et d'étoile de mer. Elle arrive à équilibrer la balance de deux façons différentes.





Ranger les trois moules du plus lourd au plus léger.

Notons e, t et p la masse de l'étoile de mer, de la tortue et du poisson.

Nous avons donc $2e + t + 2p = 3e + 2t$ On en déduit $2p = e + t$

La deuxième pesée indique $2e + 2p = e + p + 4t$ et donc $e + p = 4t$
Il faut donc à la fois $e = 2p - t$ et $e = 4t - p$ ce qui implique $2p - t = 4t - p$ et ainsi $3p = 5t$

$p = \frac{5}{3} \times t$ donc le poisson est plus lourd que la tortue (car $\frac{5}{3} > 1$).

$e = 4t - p = 4t - \frac{5}{3} \times t = \frac{12-5}{3} \times t = \frac{7}{3} \times t$ donc l'étoile aussi est plus lourde que la tortue.

$t = \frac{3}{5} \times p$ donc $e = \frac{7}{3} \times t = \frac{7}{3} \times \frac{3}{5} \times p = \frac{7}{5} \times p$ ainsi l'étoile est plus lourde que le poisson.

Les trois moules, du plus lourd au plus léger, sont : **étoile de mer – poisson – tortue**.

Autre méthode (sans équation) :

Si on enlève de chaque plateau de la première balance une tortue et deux étoiles de mer, il reste 2 poissons en équilibre avec une tortue et une étoile de mer. Ceci permet de placer aussitôt le **poisson** en **poids moyen**.
Il reste deux possibilités : tortue < poisson < étoile de mer ou étoile de mer < poisson < tortue

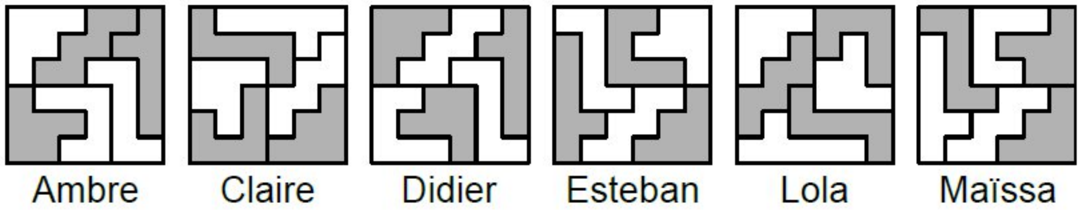
Si on enlève de chaque plateau de la deuxième balance un poisson et une étoile de mer, il reste un poisson et une étoile de mer en équilibre avec 4 tortues.

Ceci permet d’éliminer l’hypothèse « étoile de mer < poisson < tortue », car alors une étoile de mer et un poisson pèseraient moins que 2 tortues.
Le **plus lourd** est donc l’**étoile de mer**, et le **moins lourd** la **tortue**.

17 - Puzzle

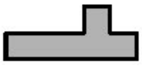
Six amis ont assemblé en carré des pièces de puzzle.

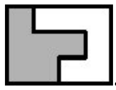
Chacune de ces pièces est blanche d’un côté et grise de l’autre côté.



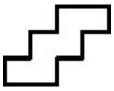
Deux d’entre eux ont utilisé exactement les mêmes pièces.

Identifier ces deux amis.

Cette pièce-là :  ou  est présente chez tout le monde (face grise chez Ambre, Didier et Esteban, face blanche chez Claire et Lola) sauf Maïssa (qui a la version grise, mais en blanc). On peut donc éliminer Maïssa.

Chez tout le monde on trouve cet assemblage de deux pièces . Cette configuration se trouve chez Ambre et Didier et, retournée, elle se retrouve chez Lola. Par contre, Claire et Estéban ont la configuration avec les couleurs inversées.

Les deux amis sont donc soit Claire et Estéban, soit deux parmi Ambre, Didier et Lola.

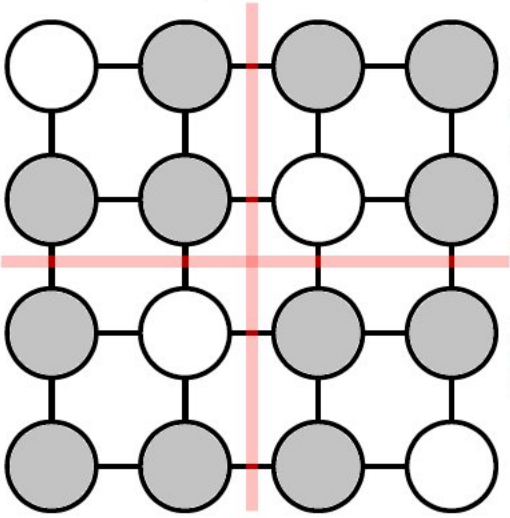
Or Claire et Estéban n’ont pas la même version de la pièce  (blanche pour les deux, mais non interchangeables sans retournement). On peut donc éliminer cette possibilité.

Toujours avec cette pièce, Ambre et Lola ont la même couleur (grise), mais leurs pièces ne sont pas interchangeables.

Les deux amis qui ont exactement les mêmes pièces sont donc Didier et Lola.

18 - En noir et blanc

Plusieurs disques du dessin ci-dessous doivent être noircis.



Quand quatre disques sont aux sommets d'un carré, petit ou grand, dont les côtés sont horizontaux ou verticaux, un au moins de ces quatre disques doit être blanc.

Noircir le plus grand nombre possible de disques.

Ici, la solution est valide :

- les 9 carrés (dont les côtés sont horizontaux et verticaux) de petite taille ont bien 1 disque blanc,
- les 4 carrés de taille moyenne (dont les centres sont les 4 disques les plus au centre du plateau) ont bien 1 disque blanc à un sommet
- le seul carré de grande taille a 2 disques blancs à ses sommets.

Comment être sûr que ce soit la meilleure solution ?

Il y a peut-être d'autres solutions ex-aequo (il y en a par symétrie en tout cas), mais on peut démontrer qu'il n'est pas possible de faire mieux.

Découpons le plateau en quatre zones de quatre disques.

Si une de ces zones possède 4 cases noircies, elle contient un carré de côtés horizontaux et verticaux dont les quatre disques sont noircis : la solution n'est pas acceptable.

Donc chacune de ces quatre zones doit avoir au maximum trois cases noircies.

Le nombre de cases noircies ne peut donc pas dépasser $3 \times 4 = 12$.

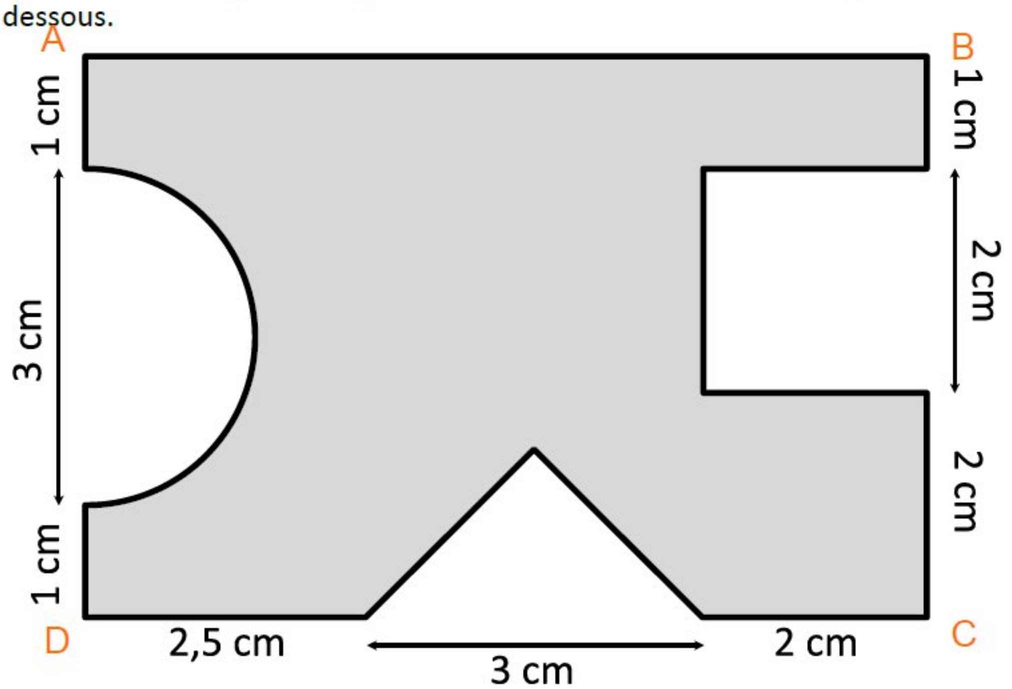
Dans la solution trouvée ci-dessus, 12 cases sont noircies, et on est certain de ne pas pouvoir trouver mieux..

19 - Décoration

À l'école, les enfants ont fabriqué des décorations pour les fenêtres.

Ils ont plié en quatre une feuille rectangulaire de 10 cm sur 15 cm, et ont ainsi obtenu un rectangle de 5 cm sur 7,5 cm.

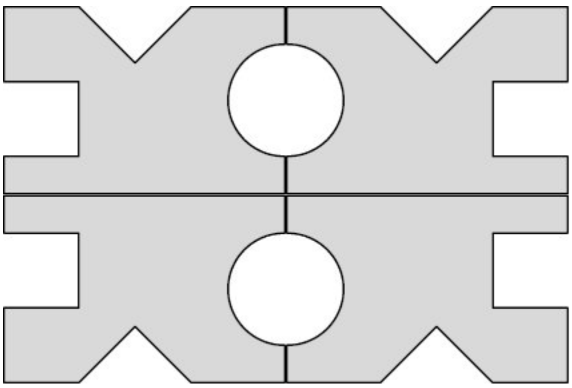
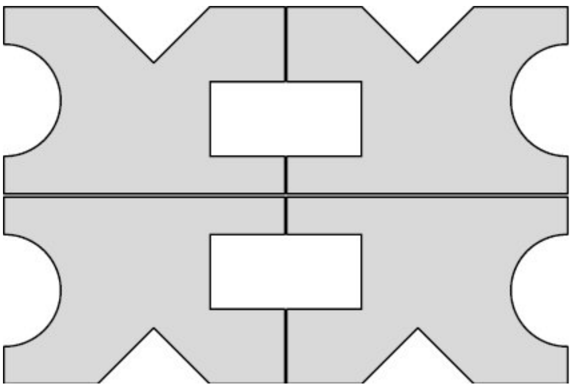
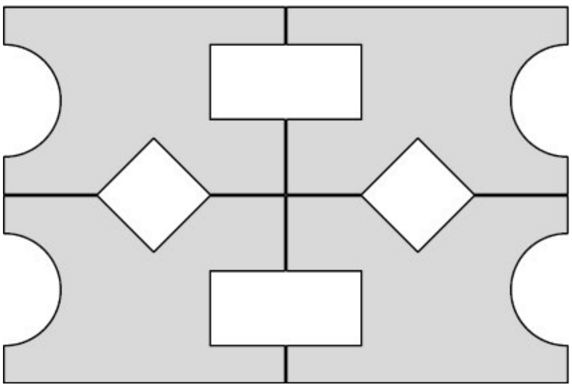
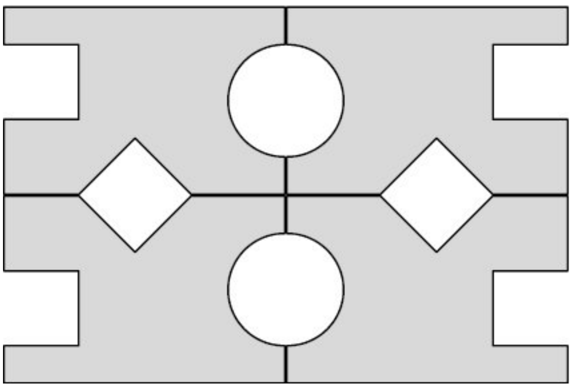
Tout en gardant cette feuille pliée, ils ont tous découpé un demi-cercle, un carré et un triangle rectangle isocèle selon le même modèle représenté ci-dessous.



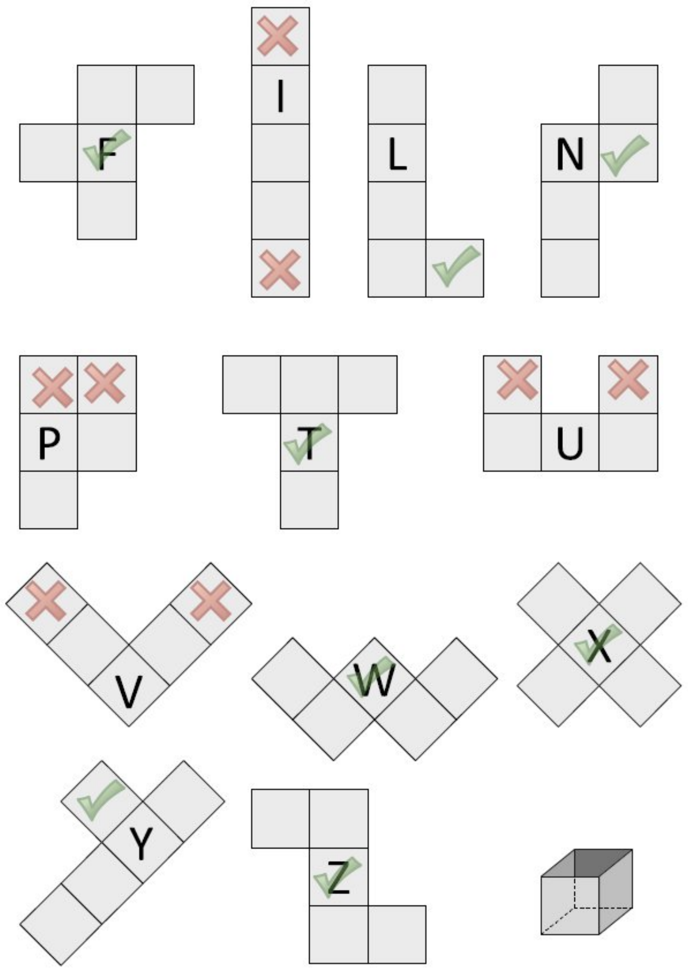
Pour obtenir la décoration, il ne restait plus qu'à déplier ! Ils furent alors surpris de voir que leurs décorations n'étaient pas toutes identiques.

Coller sur la feuille-réponse toutes les décorations différentes réalisables à partir de ce modèle.

Il y a quatre configurations possibles : le centre de la feuille dépliée peut correspondre à A, B, C ou D.

20 - Pentaminos



Quels sont les quatre pentaminos qui ne sont pas un patron de la boîte cubique sans couvercle ci-dessus ?

Les faces marquées d'une croix se retrouvent superposées lorsqu'on cherche à former la boîte. Pour les patrons marqués d'une coche, on peut bien arriver à former la boîte, et la face qui porte la coche est celle à poser au sol (qui est donc opposée à l'ouverture).

La réponse est donc **I, P, U, V**.

21 - Âge martien

Thomas, né le 27 février 1978, espère être parmi les premiers astronautes qui séjourneront sur la planète Mars. L'arrivée de la mission est prévue le 27 février 2040, jour de son 62ème anniversaire.
Un jour solaire martien moyen est appelé un ***sol*** et dure 88 775,244147 s.
Une année solaire martienne moyenne dure 668,6 ***sols***.
Une année terrestre dure en moyenne 365,2524 ***jours***.

Quel sera l'âge de Thomas en années martiennes le 27 février 2040 ?

Un âge se donne en années entières révolues.

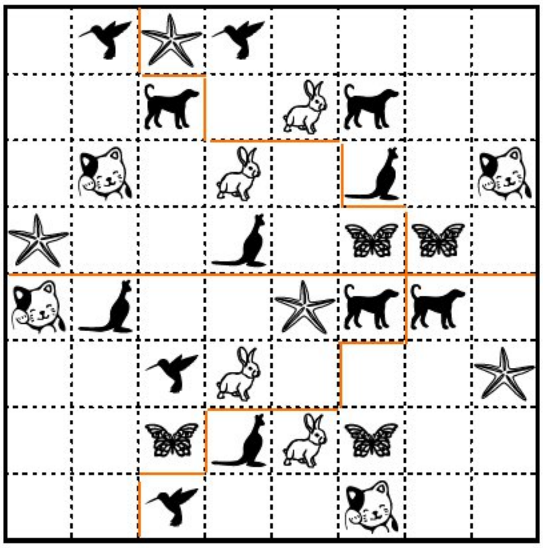
L'âge de Thomas, en secondes, le 27/02 2040 est $62 \times 365{,}2524 \times 24 \times 60 \times 60$

Le nombre de secondes dans une année martienne est $668{,}6 \times 88\,775{,}244147$

$$\frac{62 \times 365{,}2524 \times 24 \times 60 \times 60}{668{,}6 \times 88\,775{,}244147} \approx 32{,}96$$

Thomas aura **32 ans** en années martiennes.

22 - Drôle de zoo



On veut poser des clôtures à l'intérieur de cet enclos pour le diviser en plusieurs parties.

- Les clôtures seront posées le long de pointillés.
- Chaque partie contiendra un animal de chaque espèce.
- Les parties auront des formes superposables avec ou sans retournement.

Tracer les clôtures sur le dessin.

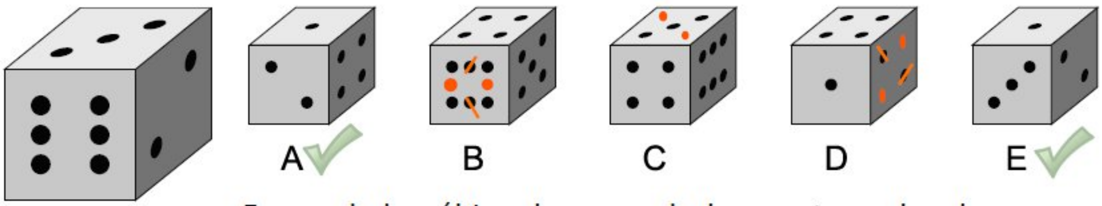
On compte 4 chats, 4 colibris, 4 lapins, 4 chiens, 4 kangourous, 4 papillons et 4 étoiles. Il faut donc 4 zones ayant chacune les 7 animaux.

On commence par tenter 4 carrés de 4x4, puis on compte les surplus et manques sur chaque carré :

- Carré supérieur gauche : 1 colibri et 1 étoile en trop, et il manque 1 papillon
- Carré supérieur droit : 1 papillon en trop et il manque 1 étoile et 1 colibri
- Carré inférieur gauche : 1 kangourou et 1 colibri en trop, et il manque 1 étoile et 1 chien
- Carré inférieur droit : 1 chien et 1 étoile en trop et il manque1 kangourou et 1 colibri

Il est évident qu'il faut essayer des échanges entre les carrés supérieurs, et entre les carrés inférieurs. En repérant les animaux à échanger qui sont le plus proche de la zone visée, la solution apparaît rapidement.

23 - Dés faux



En un dado cúbico, la suma de los puntos sobre las caras opuestas es siempre siete. Queriendo dibujar el dado al lado, en otras posiciones, Virginia se ha equivocada varias veces.

¿Cuáles son los dibujos correctos? *(Rodear sus letras en la hoja de respuestas)*
Corregir los otros dibujos en la hoja de respuestas, modificando solamente una sola de las caras visibles.

Su un dado cubico, la somma dei punti segnati su due lati opposti è sempre uguale a sette. Disegnando il cubo qui accanto in altre posizioni, Enzo ha sbagliato più volte.

Quali sono i disegni corretti? *(Cerchia le loro lettere sul foglio)*
Correggi gli altri disegni sul foglio, modificando solo una delle tre facce visibili.

Auf einem Würfel ist die Summe der auf den entgegengesetzten Seiten gezeichneten Augen immer gleich 7. Als er den nebenstehenden Würfel in anderen Stellungen zeichnen wollte, hat sich Wolfgang mehrmals geirrt.

Welches sind die richtigen Zeichnungen?
(Umgeben Sie bitte deren richtige Buchstaben auf dem Antwortbogen)
Dabei dürfen Sie nur eine der 3 sichtbaren Seiten verändern.

On a cubic die, the sum of the points marked on opposite sides is always equal to seven. By attempting to draw the opposite sides of the die in other positions, Prince William made several mistakes.

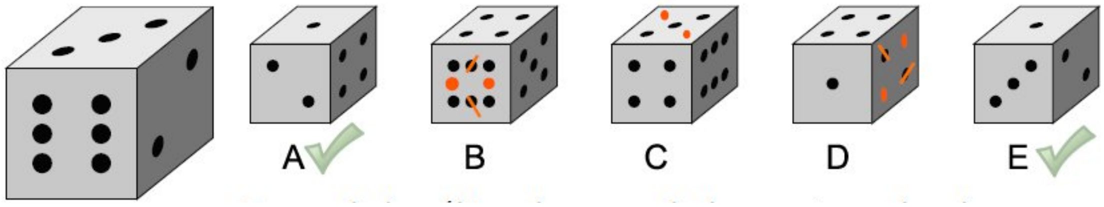
What are the correct designs? ***(Circle their letters on the answer sheet)***
Correct the other drawings on the answer sheet, by modifying only one of the three visible faces.

Méthode « papier-ciseaux » : on construit le dé en papier, et on dessine les points des faces cachées. Il n'y a pour cela qu'une seule possibilité car les chiffres manquants sont 1, 4 et 5 qui sont identiques dans toutes les orientations. Il reste ensuite seulement à tourner ce dé de papier pour essayer de le faire coïncider aux différentes propositions, ou quand c'est impossible de faire coïncider deux faces, et corriger la troisième.

Autre méthode : Gardons en tête les faces qui doivent être opposées : six et un ; cinq et deux ; quatre et trois.

Le dé A est bon : depuis l'original on pivote la face de devant à gauche puis la face supérieure à gauche.

Le dé B est incorrect : dans l'original les « barres » du six sont alignées en direction de trois, et donc de quatre de l'autre côté.
Étudions ce qui est possible sans modifier la face six. Il faudrait alors modifier la face portant un cinq, pour obtenir soit trois soit quatre. Quatre n'est pas possible, car déjà sur une face. Il faudrait alors modifier cinq pour écrire trois. Mais c'est impossible aussi car trois et quatre doivent se faire face.
Il est donc impératif de modifier la face six.
Quatre et cinq étant placés, étudions la façon dont le cube original a bougé : cinq et deux sont opposés, de même que quatre et trois, donc on a pivoté deux fois la face droite vers le haut. Il faut donc modifier la façon d'écrire six.



Le dé C est incorrect : quatre et trois doivent être opposés. Il faut donc modifier une de ces deux faces, et pas la face six. Les barres du six doivent être alignées avec quatre et trois, c'est donc la face trois qu'il faut modifier.
Quatre et six étant placés, cette face doit contenir cinq ou deux.
Etudions la façon dont le cube original doit bouger, pour obtenir quatre et six ainsi : pivoter la face supérieure vers la droite puis la face de devant vers la droite. Deux se retrouve face au sol, et il faut inscrire cinq en haut.

Pour le dé D, essayons de modifier l'orientation de l'original. <u>Pour obtenir le un devant</u>, il a fallu pivoter deux fois la face de devant vers a droite, puis éventuellement plusieurs fois (0, 1, 2 ou 3 fois) la face supérieure vers la droite.
- 0 fois ne fonctionne pas : le trois est resté en haut et le cinq est à droite, il faudrait modifier deux faces.
- 1 fois ne fonctionne pas : le trois serait à droite et le deux en haut, il faudrait à nouveau modifier deux faces.
- 2 fois fonctionne <u>presque</u> : le trois est alors en bas et le quatre en haut (bien placé), et le deux est à droite mais dans une autre orientation. (c'est comme si le dé original avait bougé en pivotant deux fois la face de devant vers le haut)
- 3 fois ne fonctionne pas : le deux se retrouve en haut et le quatre à droite.
Le dé D est donc incorrect, et il suffit de modifier en changeant la disposition du deux à droite.
Imaginons tout de même que la face un puisse être incorrecte, et les faces quatre et deux correctes. Pour obtenir le quatre en haut et le deux à droite, il faudrait pivoter deux fois la face avant l'original vers le haut. Et dans ce cas la face deux à droite est mal orientée, ce n'est pas possible.

Le dé E est correct : depuis l'original, pivoter la face supérieure vers l'avant.

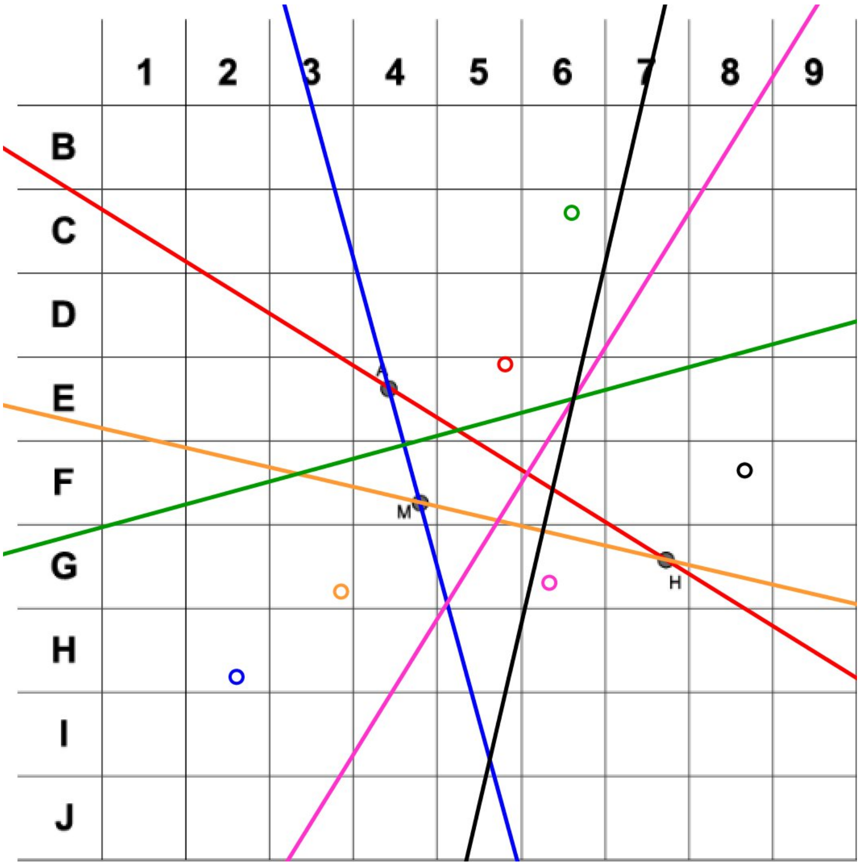
24 - L'île au trésor

Jo, le chercheur de trésors, a découvert ce parchemin sur une île déserte.

Après avoir trouvé les trois arbres, il a fait une carte et quadrillé le terrain.

Dans quelle(s) case(s) du quadrillage Jo a-t-il une chance de trouver le trésor ?

> Pour trouver le trésor T, il vous faudra creuser car le trésor est enterré.
> Pour vous guider dans vos recherches, commencez par chercher sur l'île le mandarinier M, l'abricotier A et l'hibiscus H.
> Sachez aussi que l'ensemble des quatre points M, A, T, H admet un axe de symétrie.
> Barberouge



Pour que quatre points non alignés aient un axe de symétrie, il y a deux possibilités :

- l'axe passe par deux points et les deux autres points sont symétriques (l'axe est la médiatrice du segment formé par les deux points)
- l'axe ne passe par aucun point, et est la médiatrice de deux segments formés par les deux couples de points.
- (passer par un seul point n'est pas possible, il y aurait alors un des autres points d'un côté, et deux de l'autre)

Cela donne six possibilités avec les trois points placés :

- en rouge, T est le symétrique de M par rapport à (AH)
- en orange, T est le symétrique de A par rapport à (MH)
- en bleu, T est le symétrique de H par rapport à (AM)
- en violet on trace la médiatrice de [AH], puis T est le symétrique de M
- en noir on trace la médiatrice de [MH], puis T est le symétrique de A
- en vert on trace la médiatrice de [AM], puis T est le symétrique de H

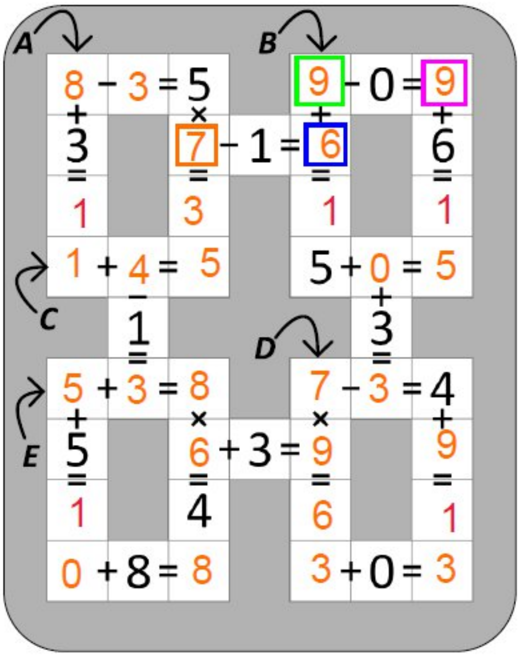
Rappel : le compas est un outil très pratique pour tracer des médiatrices et réaliser des symétries axiales.

Jo doit donc creuser en **C6, E5, F8, G3, G6** et **H2**.

25 - Garam

Dans ce jeu de grille :

- chaque case contient un unique chiffre de 0 à 9 ;
- chaque ligne et chaque colonne de trois ou quatre cases blanches forme une opération correcte ;
- dans une opération verticale, les deux cases qui suivent le symbole = forment un nombre à deux chiffres ne commençant pas par 0.



Les nombres verticaux à deux chiffres ne doivent pas commencer par 0. S'ils sont issus d'une addition, ils ne peuvent pas non plus commencer par 2 ou plus, car le maximum est 9+9=18. Cela permet de placer tous les 1 rouges.

Le chiffre en bas à droite du motif en bas à gauche doit être issu d'une addition avec 8 donc il vaut 8 ou 9.
S'il vaut 9, alors verticalement il faut $? \times ? = 49$ ce qui ne laisse aucun choix : 7×7. Mais 7+3=10, c'est impossible à inscrire.
Ce chiffre vaut donc 8. On peut alors trouver 0 et 5 dans le même motif.

Il faut alors verticalement $? \times ? = 48$. Or $48 = 2^4 \times 3$ et la seule façon de le décomposer en produit de deux chiffres est alors 6×8. 8+3 n'est pas possible horizontalement, donc c'est nécessairement 6+3.

Le motif en bas à gauche est donc fini, et on a pu inscrire un 4 dans le motif en haut à gauche, et un 9 dans le motif en bas à droite.

Observons le chiffre en bas à droite du motif en haut à gauche. Il doit être horizontalement le résultat d'une addition avec 4 (4, 5, 6, 7, 8 ou 9), et verticalement le chiffre des unités d'une multiplication par 5 (0 ou 5). Il vaut donc forcément 5.

Il ne reste que deux chiffres à trouver dans ce motif.

La case orange peut contenir 3, 5, 7 ou 9 (pour obtenir verticalement un multiple de 5 terminant par 5.
Cela donne, pour la case bleue, 2, 4, 6 ou 8. On constate déjà que 2 et 4 sont impossible, verticalement on ne pourrait pas obtenir 15.
Orange contient donc 7 ou 9
Bleu contient 6 ou 8
Vert contient 9 ou 7, de même que violet.
Si violet contient 7, alors verticalement on obtient 13, ce qui est impossible car il faudrait horizontalement obtenir 3 avec une addition par 5.
Donc violet contient 9, bleu contient 6 et orange contient 7. **Et on finit ainsi les deux motifs supérieurs, puis le dernier.**

26 - Temps martien

La mission Mars 2020 a déposé le rover Persévérance à la surface de la planète rouge le jeudi 18 février 2021 à 20 h 55 en temps universel.
Un jour solaire martien moyen est appelé un ***sol*** et dure 88 775,244 147 s.
Un jour solaire terrestre moyen, c'est à dire un ***jour***, dure 86 400 s.
L'année solaire martienne moyenne dure 668,6 ***sols***.

Quelle est la durée d'un *sol* ?

*Donner la réponse en jours heures minutes secondes terrestres sous la forme _j**h**min**s (où _ représente un nombre entier et ** représente un nombre de deux chiffres).*

Quelle est la durée d'une année martienne ?

*Donner la réponse en jours heures minutes terrestres sous la forme _j**h**min (où _ représente un nombre entier et ** représente un nombre de deux chiffres).*

À quelle date et à quelle heure en temps universel a commencé le deuxième *sol* de la mission ?

Date : JJ/MM Heure : hh:mm

Un sol dure environ 88 775 secondes, à convertir en jour, heures, minutes et secondes. Il s'agit donc de réaliser des divisions euclidiennes par 60 ou par 24 (touche « a+b/c » sur certaines calculatrices ; en python : // pour le quotient et % pour le reste).

88 775 secondes donnent 1 479 minutes et 35 secondes.
1 479 minutes donnent 24 heures et 39 minutes.
24 heures donnent 1 jour et 0 heures.

Un sol dure donc 1j00h39min35s.

Une année martienne dure $88\,775{,}244\,147 \times 668{,}6 \approx 59\,355\,128$ secondes
Cela donne 989 252 minutes et 8 secondes
989 252 minutes correspondent à 16 487 heures et 32 minutes
16 487 heures donnent 686 jours et 23 heures.

Une année martienne dure donc 686j23h32min.

Le deuxième sol commence jeudi 18 février 2021 à 20 h 55 plus 1j00h39min (ou 1j00h40min si on arrondit les 35s d'un sol).

Les minutes donnent 55+39=94, soit 1h 34
Les heures donnent 20+00+1=21

Ainsi, c'était le **vendredi 19 février 2021 à 21h34min (ou 21h35min)**.

27 - Recyclette

En France, la consommation moyenne de canettes de boisson est de 76 canettes par an par chacun des 67 millions d'habitants.

En 2020, 60 % des canettes sont en aluminium et 40 % en acier. Une canette (en acier comme en aluminium) peut être recyclée à l'infini. On estime qu'environ 70 % des canettes consommées en France sont recyclées.

Si l'on recycle 700 canettes en aluminium, on récupère la quantité d'aluminium nécessaire à la fabrication d'une bicyclette. Par ailleurs, 15 millions de canettes en aluminium permettent de fabriquer un avion.

Combien pourrait-on fabriquer de bicyclettes avec l'aluminium des canettes recyclées pendant une année en France ?

En combien de jours jette-t-on sans les recycler, en France, un nombre de canettes en aluminium qui permettrait de fabriquer un avion ?

Donner les réponses arrondies à l'entier.

Chaque année, il y a $76 \times 67 = 5\ 092$ millions de canettes consommées.

Parmi elles, $5\ 092 \times 0{,}6 \times 0{,}7 = 2\ 138{,}64$ millions sont en aluminium, et recyclées.

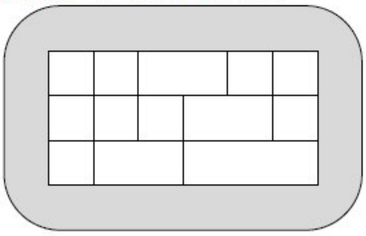
$2\ 138{,}64 \times 10^6 \div 700 = 3\ 055\ 200$
Donc **3 055 200 bicyclettes** pourraient être fabriquées avec la quantité d'aluminium des canettes recyclées pendant une année.

$5\ 092 \times 0{,}6 \times 0{,}3 = 916{,}56$ millions de canettes en aluminium ne sont pas recyclées, chaque année.
Une année dure en moyenne 365,2524 jours (voir 21-Âge martien).
Donc chaque jour, environ 2,509 millions de canettes en aluminium ne sont pas recyclées ($916{,}56 \div 365{,}2524$).

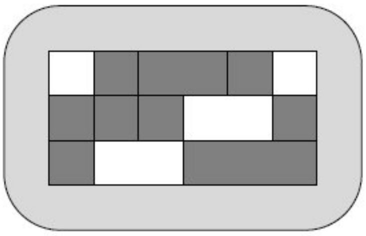
Or $15 \div 2{,}509 \approx 6$. Il faut **environ 6 jours** pour jeter sans recycler un nombre de canettes en aluminium qui permettrait de fabriquer un avion.

28 - Art abstrait

Tristan est un artiste qui compose toujours ses tableaux de la même manière : il choisit deux couleurs et dessine ensuite un tableau formé de tuiles. Chaque tuile est colorée avec une des couleurs choisies et, dans chaque ligne comme dans chaque colonne, il y a toujours les mêmes proportions des deux couleurs.



Exemple de tableau :
2/3 gris, 1/3 blanc



Solution

Colorier de même le tableau ci-dessous.

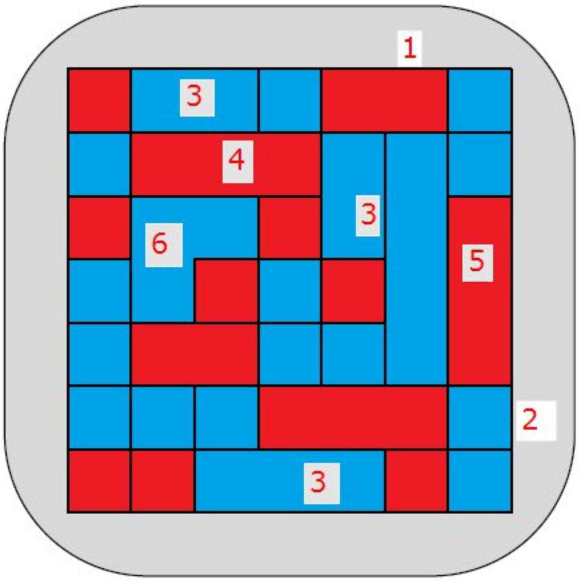


Tableau :
3/7 rouge, 4/7 bleu

Dans la colonne 1, la tuile de longueur 4 est forcément bleue (car elle ne peut pas être rouge, cela donnerait une colonne avec au moins 4 rouges) et les autres cases sont rouges.

Ainsi, dans la ligne 2, les 3 rouges sont déjà placés, et les autres cases sont forcément bleues.

Les tuiles indiquées « 3 » sont forcément bleues, car si elles étaient rouges le nombre de rouge sur la ligne ou la colonne qui les contient serait trop grand.

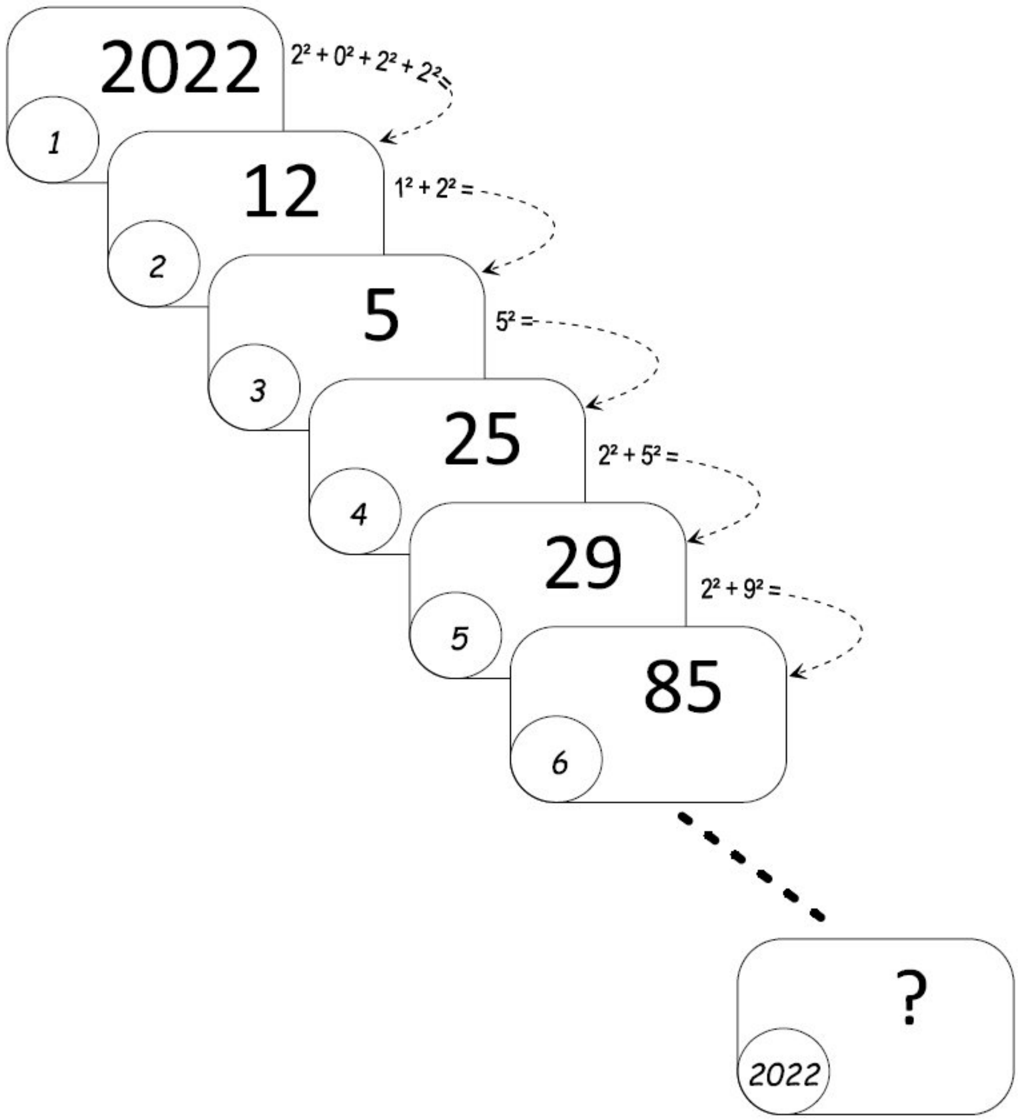
La tuile notée 4 est nécessairement rouge, car si elle était bleue il y aurait 5 bleus sur la ligne. La ligne qui contient cette tuile peut donc être complétée.

Maintenant, c'est la tuile 5 qui est dans la même situation, ce qui permet de compléter la dernière colonne. On peut alors compléter la dernière ligne.

La tuile 6 ne peut pas être rouge, ou bien cela créerait une colonne avec 4 rouges.

Le reste se complète naturellement.

29 - Des carrés en cascade



Tentons de poursuivre la cascade :

7	$8^2+5^2=89$
8	$8^2+9^2=145$
9	$1^2+4^2+5^2=42$
10	$4^2+2^2=20$
11	$2^2+0^2=4$
12	$4^2=16$
13	$1^2+6^2=37$
14	$3^2+7^2=58$

Et à partir d'ici, comme $5^2+8^2=8^2+5^2$, cela tournera en boucle sur les huit nombres 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58.

A partir de la case numéro 7, les cases dont le reste dans la division euclidienne par huit est égal à 7 porteront toutes le nombre 89. Une logique similaire avec les autres restes possibles donne le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne par huit du numéro de case (à partir de la 7ème case)	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre dans la case	145	42	20	4	16	37	58	89

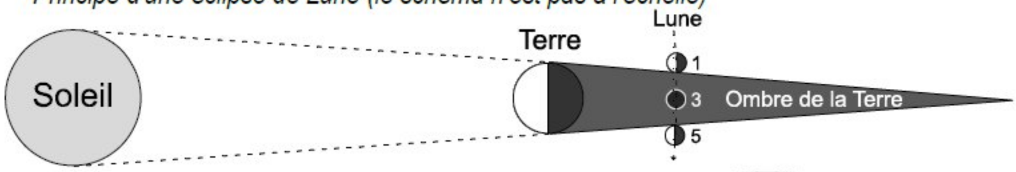
Or le reste de la division euclidienne de 2022 par 8 est 6 (2022 = 8x252 + 6)

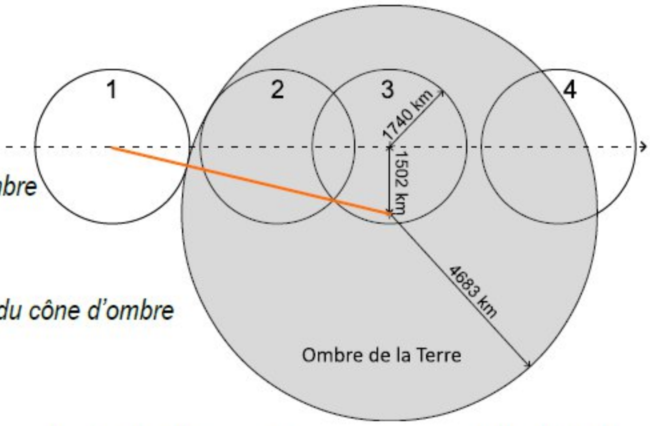
Donc **la case numéro 2022 porte le nombre 58**.

30 - La Lune s'éclipse

Le 16 mai 2022, la Lune passera dans l'ombre de la Terre. Toutes les personnes situées dans cette ombre pourront alors observer une éclipse totale de Lune.

Principe d'une éclipse de Lune (le schéma n'est pas à l'échelle)





1 : la Lune entre dans le cône d'ombre
2 : début de l'éclipse totale
3 : maximum de l'éclipse
4 : la Lune est partiellement sortie du cône d'ombre
5 : fin de l'éclipse

Le maximum de l'éclipse aura lieu à 4 h 12 min, temps universel, c'est-à-dire 6 h 12 min (heure de Paris).

Distance entre le centre de la Lune et le centre de l'ombre, au maximum de l'éclipse	1 502 km
Rayon du cône d'ombre, à la distance de la Lune	4 683 km
Rayon de la Lune	1 740 km
Vitesse de la Lune sur son orbite	3 608 km/h

À quelle heure (heure de Paris, heures et minutes) la Lune entrera-t-elle dans le cône d'ombre ?

Écrire sur la feuille-réponse les opérations successives et les résultats de ces opérations permettant d'obtenir cette heure à partir des données de l'énigme.

En ajoutant le segment orange, on crée un triangle dont un côté mesure 1502km, l'autre mesure $4683 + 1740 = 6423$ km (rayon du cône à cette distance + rayon de la Lune) et le dernier côté est la distance parcourue par la Lune entre l'entrée dans le cône d'ombre et le maximum de l'éclipse.

Or le maximum de l'éclipse est lorsque la Lune est le plus proche possible du centre du cône d'ombre. Et la plus courte distance entre un point (centre du cône d'ombre) et une droite (trajectoire de la Lune) est la longueur du segment perpendiculaire à la droite et passant par ce point (créant ainsi le projeté orthogonal du point sur la droite).

Donc le triangle a un angle droit au niveau du centre de la Lune en position 3.

Ainsi, le théorème de Pythagore affirme que la distance parcourue par la Lune entre l'entrée dans le cône d'ombre et le maximum de l'éclipse est de $\sqrt{6423^2 - 1502^2}$ km.

Connaissant la distance et la vitesse, on peut calculer la durée entre l'entrée et le maximum, en minutes :

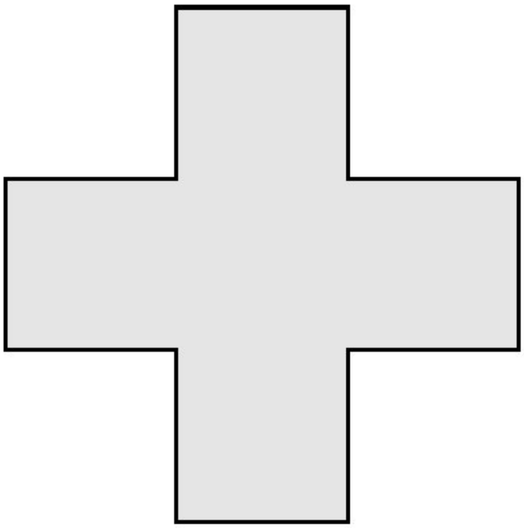
$$\frac{\sqrt{6423^2 - 1502^2}}{3608} \times 60 \approx 104$$

Il faut donc soustraire 104 minutes à 6 h 12. On soustrait déjà 12 minutes, ce qui donne 6h, et il reste à soustraire 92 minutes, donc 1h et 32 minutes. Ce sera donc 32 minutes avant 5h du matin.

La Lune entrera dans le cône d'ombre à **4 h 28 min**.

31 - Coups de ciseaux

Sur cette croix, tracer deux segments de découpe permettant d'assembler (sans retournement) les morceaux obtenus en un carré plein.

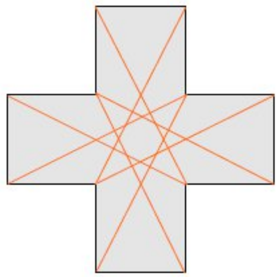


Choisissons comme unité de longueur la largeur de chaque bande formant la croix. Ainsi, l'aire de la croix correspond à 5 unités d'aires (car la croix est formée de cinq carrés de côté 1 unité de longueur).

Ainsi, on doit chercher à créer un carré d'aire égale à 5 unités d'aires. Son côté doit donc être égal à $\sqrt{5}$ unités de longueur.

Il faut donc « créer » des segments de longueurs égales à $\sqrt{5}$ en seulement deux coups de ciseaux.
L'idéal serait que chaque coup de ciseaux ait une longueur égale à $\sqrt{5}$...

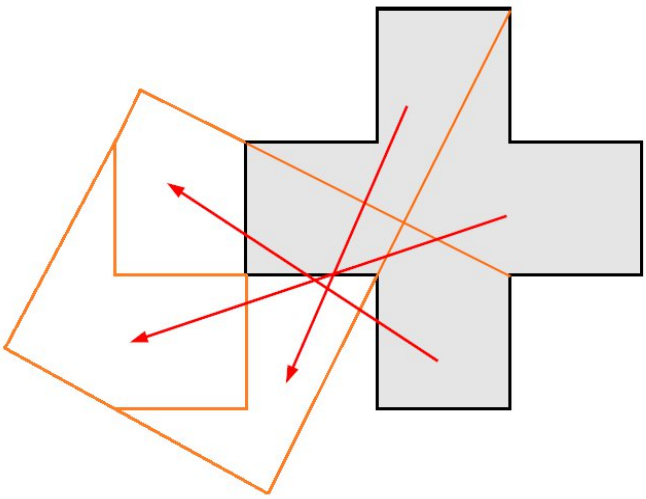
On peut utiliser les angles droits de la croix et le théorème de Pythagore pour chercher des idées. Dans un triangle rectangle, avec des longueurs entières pour les côtés formant l'angle droit, est-il possible d'obtenir une hypoténuse de longueur $\sqrt{5}$?
Oui, car $1^2 + 2^2 = 5$

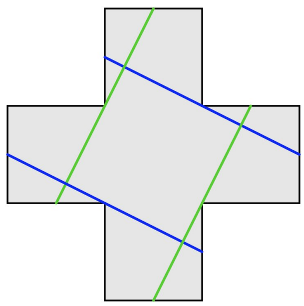


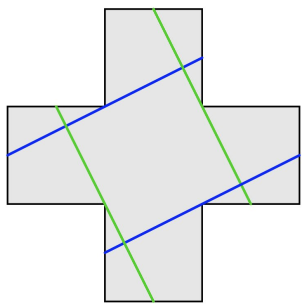
Il est donc très facile de tracer à partir de la figure 8 segments de la bonne longueur :

Pour former un carré, il serait utile de choisir deux segments formant un angle droit.

Effectivement, cela fonctionne :







Remarque : il existe une infinité de segments de longueur $\sqrt{5}$ dans cette figure : une première famille de segments parallèles entre eux (entre les segments verts) et une deuxième famille perpendiculaire à la précédente (entre les segments bleus). Un segment quelconque de chaque famille donne une solution à l'énigme.

32 - Troc-récré

Les éco-délégués d'une école ont instauré un "troc-récré". Ce jour-là, chacun des 10 enfants de la classe apporte 1 ou 2 ou 3 jouets à l'école.

Pendant la récré, chaque enfant va troquer des jouets une fois avec chacun des autres enfants.

S'ils ont le même nombre de jouets, ils se les échangent.

S'ils n'en ont pas le même nombre, celui qui a le moins de jouets les échange tous contre autant de jouets de l'autre enfant.

Ainsi, quand un enfant ayant 2 jouets et un enfant ayant 3 jouets se rencontrent pour troquer leurs jouets, il y a 4 jouets échangés.

À la fin de la récré, il y a eu 166 jouets échangés.

Combien d'enfants avaient apporté 1 jouet ? 2 jouets ? 3 jouets ?

Lorsque n élèves se serrent la main, chacun des n élèves va tendre la main à $n-1$ autres élèves, ce qui donne $n \times (n-1)$ mains tendues, et $\frac{n\times(n-1)}{2}$ serrages de mains (il faut deux mains pour un serrage de main).
Ici, le même principe peut être appliqué : si n élèves s'échangent 1 jouet, chacun des n élèves va donner un jouet à $n-1$ autres élèves. Il y a donc $\frac{n\times(n-1)}{2}$ rencontres entre élèves (cf. méthode 1) ou encore $n \times (n-1)$ jouets échangés (cf. méthode 2).

Méthode 1 (avec utilisation de programmation)

1) Considérons d'abord les enfants qui ont apporté 1 jouet. Notons a le nombre de ces enfants.

Entre eux, il va y avoir $a(a-1) \div 2$ rencontres. Et chacun d'entre eux va aussi rencontrer les $10-a$ autres élèves.

Il y aura donc, avec ces élèves, $\frac{a(a-1)}{2} + a(10-a)$ rencontres. Chaque rencontre produit 2 échanges de jouets.

Il y aura donc $a(a-1) + 2a(10-a)$ échanges de jouets, c'est-à-dire $\mathbf{19a - a^2}$ **échanges** faisant intervenir les enfants avec 1 jouet.

2) Considérons maintenant les enfants qui ont apporté 2 jouets. Notons b le nombre de ces enfants.

Ils ont déjà échangé des jouets avec les a enfants déjà considérés. Entre eux, ils vont aussi créer $\frac{b(b-1)}{2}$ rencontres, et ils rencontreront chacun les $10-a-b$ élèves qui ont apporté 3 jouets.

Cela donne $\frac{b(b-1)}{2} + b \times (10-a-b)$ nouvelles rencontres.
Ces rencontres là produisent 4 échanges de jouets chacune, ce qui donne $2b(b-1) + 4b \times (10-a-b)$, c'est-à-dire $\mathbf{38b - 2b^2 - 4ab}$ **nouveaux échanges** de jouets.

3) Il reste à considérer les $\mathbf{10-a-b}$ enfants qui ont apporté 3 jouets.

Entre eux, ils vont créer $(10-a-b) \times (9-a-b) \div 2$ rencontres, créant chacune 6 échanges de jouets.
Cela donne $6 \times (10-a-b) \times (9-a-b) \div 2 = \mathbf{3\left(90 - 19a - 19b + a^2 + b^2 + 2ab\right)}$ **nouveaux échanges**.

Au total, avec les 3 séries d'échanges de jouets, on obtient $270 - 38a - 19b + 2ab + 2a^2 + b^2$ échanges de jouets.

```
for a in range(11):
  for b in range(11-a):
    t = 270 - 38*a - 19*b
    t = t + 2*a*b
    t = t + 2*a**2 + b**2
    if t == 166:
      print(a,b)
```

```
>>> from aaa import *
2 3
>>> |
```

Il ne reste qu'à demander à Python d'identifier les possibilités permettant d'obtenir 166.
Il n'y a visiblement qu'une seule possibilité : **2 élèves viennent avec 1 jouet, 3 élèves viennent avec 2 jouets, et 5 viennent avec 3 jouets**.

Vérification : il y aura 1 rencontre entre les 2 élèves à 1 jouet, donc 2 jouets, puis il y aura $2 \times 8 = 16$ rencontres avec les autres, donc 32 jouets.
Les 3 élèves à 2 jouets échangeront 12 jouets entre eux, et il y aura 3×5 rencontres à 4 échanges (donc 60 jouets).

Les 5 derniers élèves vont créer 10 rencontres, et échanger <u>60 jouets</u>.
On a bien $2+32+12+60+60=166$

Méthode 2 (sans programmation)

Les 10 enfants ont au moins 1 jouet chacun.

- Nombre de jouets échangés au cours des échanges d'un premier jouet de chacun des 10 enfants avec chaque autre enfant : 10 × 9 = 90. <u>Il en manque donc 76.</u>
- Pour les n enfants ayant apporté au moins 2 jouets, les échanges d'un deuxième jouet entre ceux-ci vont ajouter $n\times(n-1)$ jouets échangés.
- Pour les p enfants (avec $p\leq n$) ayant apporté 3 jouets, les échanges du troisième jouet entre ceux-ci vont ajouter $p\times(p-1)$ jouets échangés.
- Ainsi, il est nécessaire de trouver le nombre n d'enfants ayant au moins 2 jouets (2 ou 3) et le nombre p d'enfants ayant 3 jouets de telle sorte que $n\times(n-1)+p\times(p-1)\ =76$, avec $p\leq n$.
- Comme $n\geq p$, on aura $n\times(n-1)\geq 76/2\geq p\times(p-1)$
- Étudions donc les valeurs possibles pour $a\times(a-1)$:

a	1	2	3	4	5	6	**7**	**8**	**9**	10
$a\times(a-1)$	0	2	6	12	20	30	**42**	**56**	**72**	90

- $38\leq n\times(n-1)\leq 76$ Les seules valeurs à étudier pour n sont donc 7, 8 et 9.
- Si $n=7$ alors $n\times(n-1)=42$ et il faudrait avoir $p\times(p-1)=76-42=34$ mais ce résultat n'est pas dans la liste des valeurs $a\times(a-1)$.
- De même, si $n=9$ alors $n\times(n-1)=72$ et il faudrait avoir $p\times(p-1)=4$ qui n'est pas dans la liste.
- Enfin, si $n=8$ alors $n\times(n-1)=56$, ce qui donne $p\times(p-1)=76-56=20$ qui correspond à $p\ =\ 5$.

On peut résumer le raisonnement dans le tableau suivant.

n	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10
$n\times(n-1)$	2	6	12	20	30	42	56	72	90
Manque pour $p\times(p-1)$					46	34	20	4	Trop grand
p	Non pertinent car $p\leq n$					Non dans la liste	**5**	Non dans la liste	

- Il y a donc une seule solution : 8 enfants ayant au moins 2 jouets, dont 5 en ayant 3.
- <u>Solution</u> : 2 enfants ont apporté 1 jouet, 3 ont apporté 2 jouets et 5 ont apporté 3 jouets.

33 - Composteur fait maison

Pour fabriquer un composteur de déchets, on dispose d'un morceau rectangulaire de grillage d'une aire de 2,70 m^2. Avec quelques attaches, on peut joindre deux côtés opposés du rectangle et ainsi obtenir un réservoir cylindrique que l'on placera verticalement.

Grégory fabrique un cylindre dont la hauteur est la longueur du rectangle.

Anne lui fait alors remarquer que, s'il avait choisi de réunir les deux autres côtés de son grillage, le cylindre serait moins haut, mais d'une plus grande contenance.

Il défait donc sa première construction et constate que le nouveau cylindre a un volume supérieur de 20 % à l'ancien.

Quelles sont les dimensions (longueur et largeur) du grillage ?

Donner les réponses en mètres, arrondies au cm près.

Si un disque a un périmètre égal à p alors son rayon doit être égal à $\frac{p}{2\pi}$ (nécessaire pour avoir $p = 2\pi r$)

Son aire est alors égale à $\pi \times \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = \frac{p^2}{4\pi}$.

Ainsi, avec un rectangle de dimensions a et b, on peut créer

- un cylindre de volume $\frac{a^2 \times b}{4\pi}$ si le côté de longueur a est enroulé et le côté de longueur b correspond à la hauteur
- un cylindre de volume $\frac{b^2 \times a}{4\pi}$ si le côté de longueur b est enroulé et le côté de longueur a correspond à la hauteur.

Un de ces deux cylindres doit avoir un volume égal à 1,2 fois le volume de l'autre (1,2 est le coefficient multiplicateur d'une hausse de 20%).

Il faut donc $\frac{a^2 \times b}{4\pi} = 1{,}2 \times \frac{b^2 \times a}{4\pi}$. On peut multiplier les deux côtés de l'égalité par 4π, et diviser par $a \times b$.

On obtient alors $a = 1{,}2 \times b$.

Mais le grillage a une aire de 2,70 m². Il faut donc $a \times b = 2{,}7$

Ainsi, en remplaçant a par $1{,}2 \times b$, on doit avoir $1{,}2 \times b^2 = 2{,}7$

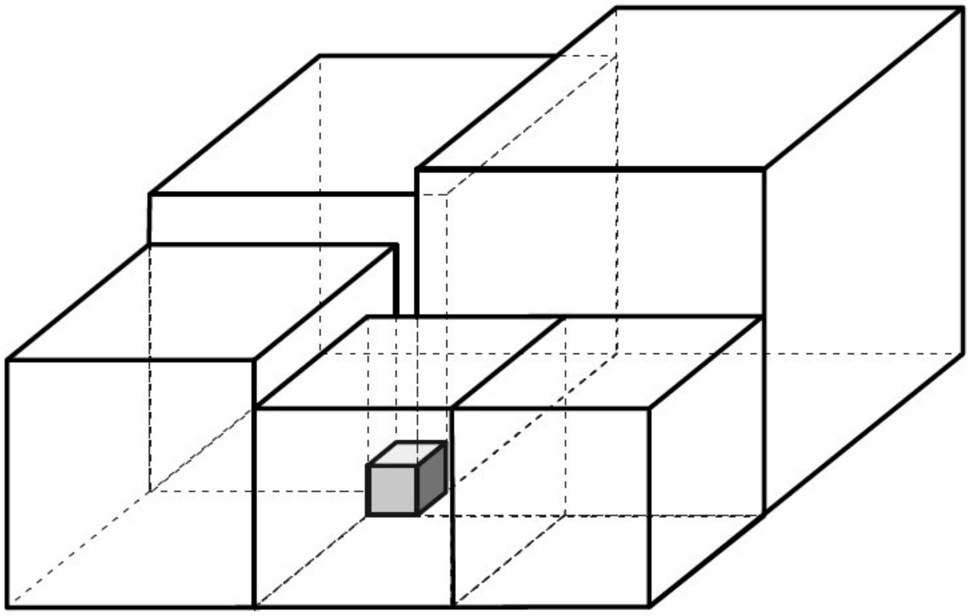
Donc $b^2 = \frac{2{,}7}{1{,}2} = \frac{27}{12} = \frac{3 \times 9}{3 \times 4} = \frac{9}{4}$ b étant une longueur, c'est un nombre positif, et ainsi

$$b = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Nous avons donc $a = 1{,}2 \times 1{,}5 = \frac{12}{10} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 6}{10} = 1{,}8$

Le grillage mesure 1,50 m par 1,80 m.

34 - Petits et grands cubes



Un pequeño cubo de un centímetro de lado está atorado entre cinco cubos grandes.

¿Cuál es el volumen del cubo más grande?

Un cubetto di lato 1 cm è incastrato tra cinque cubi grandi.

Calcola il volume del cubo più grande.

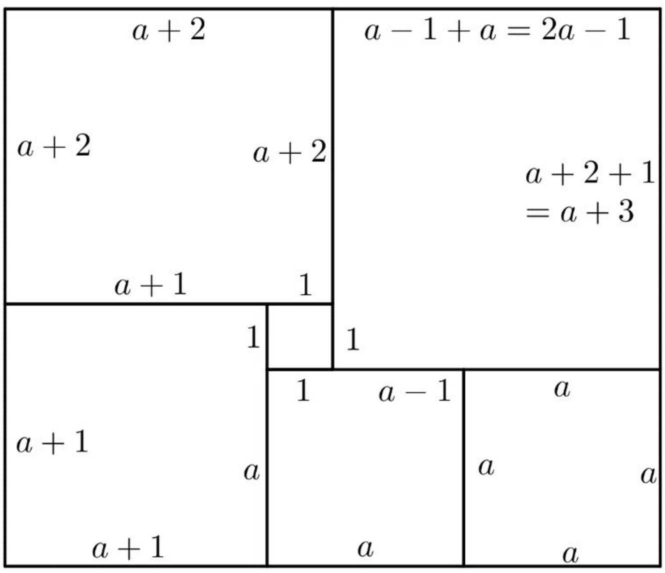
Ein Würfelchen dass auf einer Seite 1 cm gross ist, ist zwischen 5 grossen Würfeln eingeklemmt.

Rechnen Sie bitte das Volumen des grössten Würfels.

A small cube, with a side of 1 cm in length, is wedged between five large cubes.

Calculate the volume of the largest cube.

Dessinons un schéma en deux dimensions, vu du haut.



On note a le côté du plus petit cube de dimension inconnue.

En notant progressivement les dimensions des carrés en fonction de a, on constate que le plus grand carré doit avoir un carré de côté égal à la fois à $2a-1$ et à $a+3$

$2a-1=a+3$ est une équation très simple, qui a pour solution $a=4$.

Le grand cube a donc un côté égal à $4+3$, ou bien à $2\times a-1$, c'est-à-dire à 7 cm.

Son volume est donc $7^3=$ **343 cm³**.