

Le jeu des hommes à chapeau

16 septembre 2025

Tiré de Edouard Lucas (1883). *Récréations mathématiques*, tome 2, GV, Paris



1 Le jeu

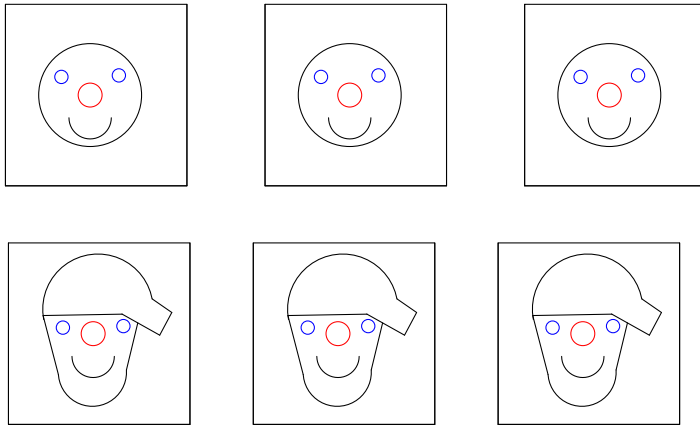
On dispose d'un tapis de 7 cases en lignes. Les trois cases de gauche sont occupées par des hommes à chapeaux, les trois cases de droite par des hommes sans chapeaux. Le but du jeu est d'inverser la position des hommes à chapeaux et des hommes sans chapeaux en un minimum de coups.

Règle du jeu :

1. On ne peut déplacer qu'un bonhomme à la fois.
2. On peut déplacer un bonhomme vers une case voisine libre ou sauter par dessus un voisin si la case suivante est libre.

2 Plateau de jeu et bonhommes

--	--	--	--	--	--	--



3 Petite analyse mathématique

La question est bien sûr de modéliser cette situation et la règle du jeu pour déterminer le nombre minimum de déplacements nécessaires pour intervertir les bonhommes

3.1 Première approche

On parlera dans la suite de pion pour désigner les hommes à chapeau et les hommes sans chapeau.

Chaque pion doit avancer de 4 cases pour se retrouver à sa place finale ; en effet, sauter par dessus un pion partenaire ne paraît pas très judicieux, puisque le bloc qui se constitue de deux mêmes pions créerait un barrage infranchissable !

Comme il y a 6 pions, il y a donc 24 déplacements d'une case à réaliser. Mais, il faut nécessairement que 3 pions sautent par dessus 3 pions. Il y a donc 9 sauts et chaque saut constitue un déplacement de 2 cases. Il faut donc enlever 9 à 24 pour trouver le nombre minimum de coups : 15.

Il faut alors réussir cette inversion en 15 coups ;

On peut reprendre ce raisonnement avec deux fois p pions sur un échiquier de $2p+1$ cases. Chaque pion peut avancer de $p+1$ cases. Comme il y a $2p$ pions, il y a $2p(p+1)$ déplacements d'une case ; comme par ailleurs p pions doivent sauter au dessus des p restants, le nombre de sauts est p^2 . Le nombre minimum de coups est donc :

$$2p(p+1) - p^2 = p^2 + 2p$$

3.2 Compteurs

Comment repérer la position des pions sur l'échiquier les uns par rapport aux autres ? On peut utiliser des compteurs :

Le premier compteur C_1 donne le nombre d'hommes à chapeau à droite de l'espace vide. Au départ, comme les hommes à chapeau sont tous à gauche de l'espace vide, $C_1 = 0$

Le second compteur C_2 donne le nombre d'hommes sans chapeau à gauche de l'espace vide. Au départ, $C_2 = 0$.

Mais ces deux compteurs ne permettent pas de modéliser la position des hommes les uns par rapport aux autres. On définit alors le compteur C_3 qui compte le nombre de couples (chapeau, sans chapeau) où l'homme à chapeau se trouve à droite de l'homme sans chapeau. Au départ, $C_3 = 0$

Quels sont les effets des déplacements sur les compteurs :

- La translation : on pousse un pion vers une case vide, donc la case vide change de côté, donc soit C_1 soit C_2 augmente de 1. On peut dire que $C_1 + C_2$ augmente de 1. C_3 ne change pas.

— Le saut :

on ne fait pas de saut au dessus d'un homme de même nature, sinon a augmenté le nombre de déplacements.

dans un saut au dessus d'un homme différent, C_3 augmente de 1 puisqu'on inverse les positions d'un couple. $C_1 + C_2$ ne change pas puisque si l'un augmente de 1 l'autre diminue de 1.

Conclusion : Un déplacement augmente $C_1 + C_2 + C_3$ de 1.

Si on regarde l'état initial :

— Tous les hommes à chapeau sont à gauche de l'espace vide : $C_1 = 0$

— Tous les hommes sans chapeau sont à droite de l'espace vide : $C_2 = 0$

— Il y a 9 couples (chapeau, sans chapeau) et pour chacun de ces couples, l'homme à chapeau se trouve à gauche de l'homme sans chapeau, donc : $C_3 = 0$.

Si on regarde l'état final :

— Tous les hommes à chapeau sont à droite de l'espace vide : $C_1 = 3$

— Tous les hommes sans chapeau sont à gauche de l'espace vide : $C_2 = 3$

— Il y a 9 couples (chapeau, sans chapeau) et pour chacun de ces couples, l'homme à chapeau se trouve à droite de l'homme sans chapeau, donc : $C_3 = 9$.

Il faut donc au moins $3 + 3 + 3 \times 3 = 15$ déplacements pour aller de l'état initial à l'état final.

On peut voir alors que ce minimum, M est le résultat de : $M = 3 + 3 + 3 \times 3$.

On généralise facilement pour n hommes de chaque côté que $M = 2n + n^2$

Pour compléter le raisonnement, il s'agit encore de réaliser effectivement cet échange en 15 coups (voir plus haut).

3.3 Algorithme

L'algorithme repose sur des règles :

1. un pion doit toujours aller vers son but
2. deux pions de même nature doivent être séparés sauf lorsqu'ils arrivent à leur but.

En suivant ces règles on peut éliminer des *mauvais* coups :

A une symétrie prêt le premier coup est obligé :

o	o	o	x		x	x
---	---	---	---	--	---	---

Ici il y a une alternative : si on bouge un x on va construire un mur infranchissable et il faudra qu'un pion fasse marche arrière (contraire à la règle 1) ; on bouge donc le o.

o	o		x	o	x	x
---	---	--	---	---	---	---

A ce moment, si on avançait le seul x qui peut bouger, le coup suivant on créerait deux pions identiques côte à côte, ce qui est contraire à la règle 2, donc on avance un o.

o		o	x	o	x	x
---	--	---	---	---	---	---

la règle 2 empêche le o de jouer, c'est donc au tour des x :

o	x	o		o	x	x
o	x	o	x	o		x
o	x	o	x	o	x	

Les x ne peuvent plus bouger si on applique la règle 1 ; c'est donc aux o de se mouvoir

o	x	o	x		x	o
o	x		x	o	x	o
	x	o	x	o	x	o

Au tour des x :

x		o	x	o	x	o
x	x	o		o	x	o
x	x	o	x	o		o

Au tour des o, puis de x

x	x	o	x		o	o
x	x		x	o	o	o
x	x	x		o	o	o

3.4 Généralisation

On pourrait considérer un damier $2p + 1 \times 2p + 1$ comme illustrer sur la figure suivante par un damier 5×5 et se poser la question du nombre minimum de coups (et de l'algorithme) permettant d'échanger les pions noirs et les pions blancs.

●	●	●	○	○
●	●	●	○	○
●	●		○	○
●	●	○	○	○
●	●	○	○	○

L'algorithme consisterait alors à déplacer la ligne horizontale médiane en $p^2 + 2p$ coups, puis déplacer de la même façon la ligne verticale médiane, mais chaque fois que la case vide apparaît sur une ligne de déplacer la ligne. Il y a donc $(2p + 1)(p^2 + 2p) + p^2 + 2p = (2p + 2)(p^2 + 2p)$ coups minimum pour échanger les pions dans le carré de côté $2p + 1$.

4 Analyse didactique

En terme de connaissances mathématiques de l'école primaire, les seules qui pourraient être retenues sont les connaissances de dénombrement.

En terme de compétences, la liste est plus longue :

- Chercher : *prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés* mais aussi *s'engager dans une démarche, observer, manipuler, expérimenter,...*, réduire le problème, organiser les cas...
- Modéliser : *utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de la vie quotidienne* : ici le jeu.
- Représenter : utiliser une schématisation, un codage.
- Raisonner : organisation des données, être capable de faire des remarques pour restreindre le problème,...
- Communiquer : *expliquer son raisonnement, comprendre les explications d'un autre, et argumenter dans l'échange.*

4.1 En terme de milieu

Dans un premier temps le plateau de jeu et les règles du jeu constituent le milieu matériel de la situation. La vérification du respect des règles peut être réalisée en proposant un jeu collaboratif à deux joueurs.

Les joueurs peuvent expérimenter et déterminer un minimum de coups. La question « Avez vous atteint le minimum ? » peut alors inciter à un raisonnement. Le raisonnement peut passer par une simplification du jeu avec un ou deux pions et dans la détermination de l'algorithme de résolution.

Il est également important de demander aux élèves de refaire le jeu s'ils annoncent un résultat. L'idée étant que l'expérience ne pourra déboucher sur un raisonnement que si elle est analysée. Avoir atteint 15 par hasard n'est pas le but de cette situation.

Avec deux pions, le minimum de 3 coups peut s'obtenir par exhaustion des cas et remarque de la nécessité d'avancer toujours vers son but.

Avec quatre pions, le minimum de 8 coups peut être là encore décrit :

G	G		D	D	
G		G	D	D	
G	D	G		D	
G	D	G	D		
G	D		D	G	
		D	G	D	G
D		G	D	G	
D	D	G		G	
D	D		G	G	

Les remarques concernant le *déplacement* de l'espace vide sur toutes les cases et la nécessité de ne pas sauter au dessus d'un même pion peuvent ressortir de ces expériences.

Il me semble essentiel de ne pas donner le minimum pour permettre aux élèves de chercher un raisonnement permettant de justifier le bien fondé de leur réponse.

4.2 Institutionnalisation

L'institutionnalisation dépend bien sûr du niveau auquel on s'adresse. Mais dès l'école primaire, il est possible de mettre en évidence des règles à mettre en œuvre pour réaliser le minimum de coups et ainsi d'approcher la notion d'algorithme.

Les éléments à institutionnaliser relèvent des heuristiques et des méthodes de raisonnement qui peuvent être réinvesties dans d'autres situations. En ce sens le prolongement proposé peut donner un sens aux raisonnements construits.

Pour des plus grandes classes, c'est également une approche intéressante de la complexité d'un algorithme. Ici l'algorithme est quadratique, c'est à dire de « l'ordre de » n^2 . On peut mettre en regard ce jeu avec les tours de Hanoï (de complexité exponentielle) et le crèpier psycho-rigide (linéaire).
