

# 1 Les résultats

Deux résultats essentiels :

**Théorème de Maekawa** (1989) : La différence entre le nombre de plis vallées (noté  $V$ ) et les plis montagnes (noté  $M$ ) se rencontrant en un point intérieur à la feuille qui est pliable à plat est toujours égale à 2 ou -2.

Preuve Si on considère une feuille de papier pliée à plat en un certain sommet avec  $n$  plis. En coupant la feuille près du sommet on obtient un polygone plat à  $n$  côtés donc la somme des angles du polygone vaut  $(n - 2)\pi$ . En orientant l'espace on peut considérer que chaque pli montagne correspond à un angle de 0 et chaque pli vallée à un angle de  $2\pi$ . On appelle  $M$  le nombre de plis montagne et  $V$  le nombre de plis vallée ; on a  $M + V = n$ . On a alors :

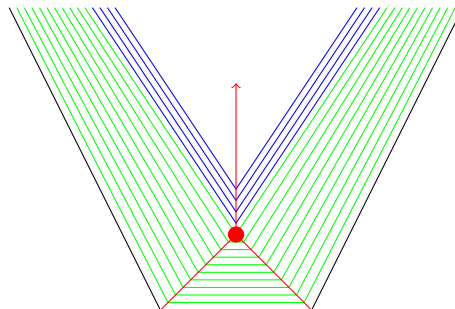
$$0 \times M + 2\pi \times V = (n - 2)\pi.$$

$$0 \times M + 2\pi \times V = (M + V - 2)\pi$$

$$V - M = -2$$

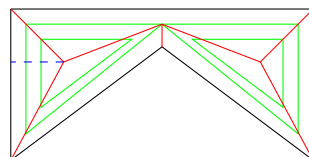
**Théorème de Demaine, Lubiw et Demaine** (1999) : Toute forme constituée de côtés rectilignes peut être découpée dans une feuille de papier en la pliant à plat et en effectuant une seule coupe droite complète.

Ces formes comprennent les polygones, qui peuvent être concaves, les formes avec des trous et les ensembles de telles formes.



Idée d'une preuve

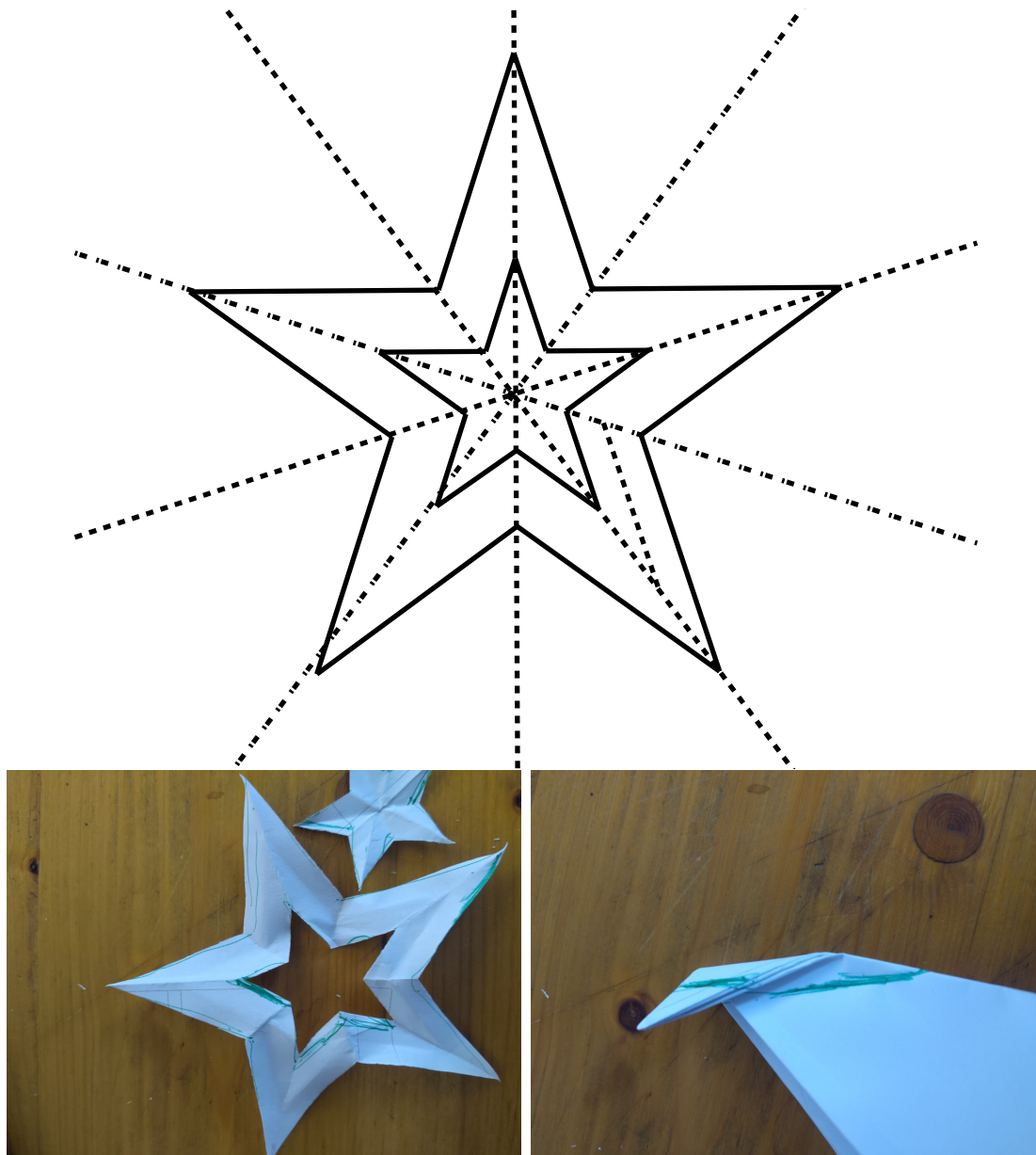
On parle de squelette droit (straight skeleton) pour l'idée d'une construction réduisant la forme de façon à conserver les orientations des arêtes et conserver la même distance orthogonale de chaque arête rétrécie à l'arête originale. Lors du rétécissement si une arête devient de longueur nulle, on crée un sommet supplémentaire (figure ci-dessus) et si une partie se divise on continue avec chacune des pièces (figure ci-dessous).



Le théorème de Maekawa demande alors de compléter la figure de façon à ce que le pliage à plat soit possible sur chacun des sommets obtenus. Par exemple dans cette deuxième figure, le pli dessiné en bleu doit être rajouté !

D'un point de vue de la géométrie élémentaire, les symétries ont bien sûr une importance capitale dans les réalisations : pour plier un secteur angulaire, on utilisera la bissectrice, un segment, la médiatrice, etc. Le théorème de Maekawa prend toute son importance quand il s'agit, par exemple, de couper un triangle quelconque. Les bissectrices doivent être des plis mais comme il n'y en a que trois, la différence des plis vallée et des plis montagne ne peut être égal à 2. Donc, on doit nécessairement trouver un autre pli, qui doit nécessairement être perpendiculaire à un des côtés du triangle et doit rejoindre le point d'intersection des bissectrices. Avec 4 plis, 2 doivent être montagne et 2 doivent être vallée.

### 1.1 Le patron pour l'étoile trouée (piste noire)

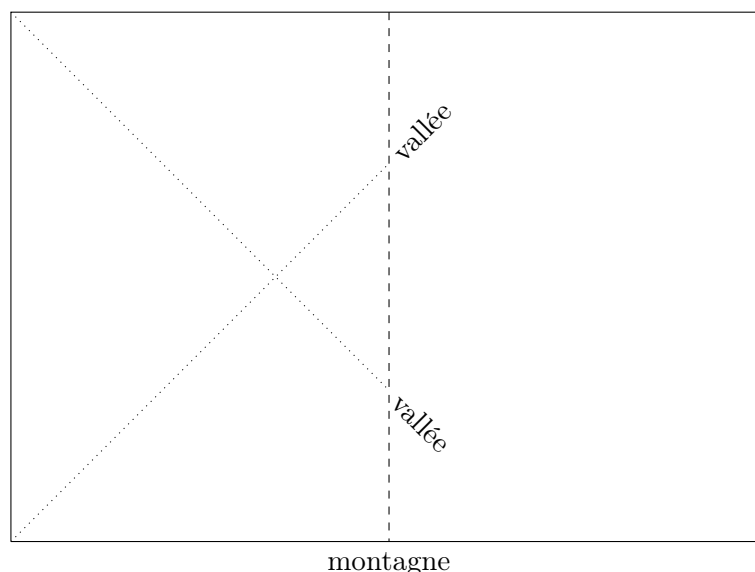


## 2 Un peu de didactique

Les variables didactiques de la situation sont évidemment les dessins proposés aux essais des joueurs (élèves ?). La piste verte propose des dessins dans lesquels les symétries sont facilement

convocables.

Pour le rectangle (le plus difficile des 3 :



Référence : master DDS de Charlotte Bertin (2018) : L'apport des origamis dans l'apprentissage des mathématiques : mise en œuvre d'une situation didactique inspirée du théorème de la découpe unique au secondaire

D'une façon générale, les enfants confrontés à ces pliages commencent empiriquement par essais-erreurs. Assez rapidement cependant, l'expérience fait apparaître la nécessité de faire coïncider des côtés et donc d'utiliser les symétries en utilisant leur vocabulaire ("tu plies en deux") ; les questions de l'impossibilité d'un pliage arrivent également souvent après plusieurs essais infructueux, par exemple pour le triangle scalène.

"L'expérimentation a permis de mettre en lumière les connaissances mathématiques et métamathématiques que pouvaient apporter une situation de recherche de problème utilisant le pliage. Notamment lors de l'analyse *a posteriori*, les élèves ont plusieurs fois mentionné des connaissances sans pour autant les nommer avec le vocabulaire adéquate. La gestuelle fait également partie intégrante de la situation afin de se faire comprendre de tous. La symétrie est apparue très clairement lors de l'analyse *a priori* et a été vérifiée lors des expérimentations. Les élèves ont alors utilisé une connaissance-en-acte, qui était de plier en deux, tout au long de la situation alors que pour le triangle scalène, cette connaissance n'est plus valable." (Bertin, 2018, page 65)